Γ. Δ. ΒΑΡΕΛΑ
Καθηγητοῦ Γενικῶν καὶ Οἰκονομικῶν Μαθηματικῶν τῆς Α.Β.Σ.Θ.

ΕΝ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΑΡΙΣΤΟΠΟΙΗΣΕΩΣ ΜΙΑΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΣ ΕΙΣ ΑΚΕΡΑΙΟΥΣ ΚΑΙ ΘΕΤΙΚΟΥΣ ΑΡΙΘΜΟΥΣ

1. ΕΙΣΑΓΩΓΗ

1.1. Εἰς τὸ περιοδικὸν «Revue Française d'automatique imformatique recherche operationnelle»[1] (p. 67 à 82) ὁ J. L. Nicolas εἰς τὴν ἐργασίαν του «Sur un probleme d'optimisation en nombres entiers de T. L. Saaty» δίδει λύσιν τοῦ ἀκολούθου προβλήματος.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ: Δοθέντος ἑνὸς ἀκεραίου καὶ θετικοῦ ἀριθμοῦ c, νὰ εὑρεθῇ ἕνας ἀκέραιος καὶ θετικὸς ἀριθμὸς καὶ οἱ ἀκέραιοι θετικοὶ ἀριθμοὶ $x_1, x_2, \dots, x_n$ τοιοῦτοι ὥστε νὰ εἶναι

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = c$$

καὶ νὰ καθιστοῦν μεγίστην τὴν συνάρτησιν

$$\prod_{i=1}^{n} x_i^i$$

1.2. Ὁ T. L. Saaty[2] (p. 191-197) ἀφοῦ θέτει τὸ ἀνωτέρω πρόβλημα ἀποδεικνύει τὸ κατωτέρω λῆμμα.

ΛΗΜΜΑ: Οἱ ζητούμενοι ἀκέραιοι τοῦ προβλήματος (1,1) ἐπαληθεύουν τὴν σχέσιν

$$1 \leqslant x_1 \leqslant x_2 \leqslant \dots \leqslant x_n \leqslant 3$$

Ἀπόδειξις

α) Διὰ τὴν μεγιστοποίησιν τῆς συναρτήσεως

$$\prod_{i=1}^{n} = x_i^i$$

εἶναι φανερὸν ὅτι οἱ ἀκέραιοι ἀριθμοὶ x_i πρέπει νὰ εἶναι τακτοποιημένοι κατ' αὔξουσαν τάξιν.

Διότι, ἐὰν εἰς τὸ γινόμενον:

$$x_1^1\ x_2^2 \ldots x_k^k\ x_{k+1}^{k+1} \ldots x_n^n$$

ἔχουν εὑρεθῆ οἱ ἀκέραιοι καὶ θετικοὶ ἀριθμοὶ $x_1,\ x_2, \ldots, x_k,\ x_{k+1}, \ldots\ x_n$ καὶ εἶναι:

$$x_{k+1} < x_k$$

πολλαπλασιάσωμεν δὲ ἀμφότερα τὰ μέλη τῆς ἀνισότητος ἐπὶ $x_k{}^k\ x_{k+1}{}^k$, θὰ λάβωμεν:

$$x_k^k\ x_{k+1}^{k+1} < x_k^{k+1}\ x_{k+1}^k$$

καὶ συνεπῶς:

$$x_1^1\ x_2^2 \ldots x_k^k\ x_{k+1}^{k+1} \ldots x_n^n < x_1^1\ x_2^2 \ldots x_k^{k+1}\ x_{k+1}^k \ldots x_n^n$$

Συνεπῶς ὑπάρχει μεγαλυτέρα τιμὴ διὰ τὸ γινόμενον $\prod_{i=1}^{n} x_i^i$ τῆς ἤδη ὑπολογισθείσης.

β) Ἐὰν $x_n = 4$, ἐπειδὴ εἶναι:

$$4^n < 2^n \,.\, 2^{n+1}$$

θὰ εἶναι καὶ

$$x_1^1\ x_2^2 \ldots x_{n-1}^{n-1} 4^n < x_1^1\ x_2^2 \ldots x_{n-1}^{n-1}\ 2^n\ 2^{n+1}$$

Συνεπῶς τὸ γινόμενον $x_1^1\, x_2^2 \ldots x_{n-1}^{n-1} 4^n$ δὲν εἶναι ἡ μεγίστη τιμὴ τοῦ γινομένου $\prod\limits_{i=1}^{n} x_i^i$

γ) Ἐὰν $x_n = m \geqslant 5$ καὶ θέσωμεν $x_n = m - 3$, $x_{n+1} = 3$, θὰ ἔχωμε:

$$x_n^n = m^n < (m-3)^n\, 3^n < (m-3)^n\, 3^{n+1}$$

Συνεπῶς:

$$x_1^1\, x_2^2 \ldots x_{n-1}^{n-1}\, m^n < x_1^1\, x_2^2 \ldots x_{n-1}^{n-1}\, (m-3)^n\, 3^{n+1}$$

Ἄρα τὸ γινόμενον $x_1^1\, x_2^2 \ldots x_{n-1}^{n-1}\, m^n$ δὲν εἶναι ἡ μεγίστη τιμὴ τοῦ γινομένου

$$\prod_{i=1}^{n} x_i^i$$

1.3. Ὁ T. L. Saaty[2] (p. 191-197), μετὰ τὴν ἀπόδειξιν τοῦ ἀνωτέρω λήμματος (1,2), ἀποδεικνύει πλείστας ἀνισότητας, αἱ ὁποῖαι τοῦ ἐπιτρέπουν τὴν γραφικὴν λύσιν τοῦ προβλήματος (1,1) διὰ δεδομένην ἀριθμητικὴν τιμὴν τοῦ c. Ἰδιαιτέρως ἐπιλύει τὸ πρόβλημα (1,1) διὰ $c = 100$.

Ὁ J. L. Nicolas[1] (p. 67-82) ἀποδεικνύει δύο θεωρήματα, διὰ τῶν ὁποίων γενικεύεται ἡ λύσις τοῦ προταθέντος προβλήματος (1,1). Ἰδιαιτέρως ἐφαρμόζει τὴν λύσιν τοῦ προβλήματος (1,1) διὰ δύο ἀριθμητικὰς τιμὰς $c = 100$ καὶ $c = 194$.

Εἰς τὴν παροῦσαν ἐργασίαν θὰ δώσωμεν μίαν γενικὴν λύσιν τοῦ ἀνωτέρω προβλήματος (1,1), στηριζομένην εἰς τὴν ἀριστοποίησιν μιᾶς συναρτήσεως τριῶν ἀνεξαρτήτων μεταβλητῶν συνδεομένων διὰ μιᾶς πρωτοβαθμίου ἐξισώσεως, οἱ δὲ ὑπολογισμοὶ εἰς τὰ ἀριθμητικὰ παραδείγματα ἔγιναν εἰς ἠλεκτρονικὸν ὑπολογιστὴν Univac 1106.

1.4. Ἀριστοποίησις μιᾶς συναρτήσεως τριῶν ἀνεξαρτήτων μεταβλητῶν συνδεομένων διὰ μιᾶς πρωτοβαθμίου ἐξισώσεως

Διὰ τὴν ἀριστοποίησιν μιᾶς συναρτήσεως

(1,4,1) $f(x,y,z) \quad /T \in R^3$

τῶν τριῶν ἀνεξαρτήτων μεταβλητῶν x,y,z συνδεομένων διὰ τῆς σχέσεως

(1,4,2) $\alpha x + \beta y + z = \gamma$

ἐργαζόμεθα ὡς ἀκολούθως[3] (σελ. 395):

Β ῆ μ α 1ον

Ἐκ τῆς (1,4,2) λαμβάνομε:

$$z = \gamma - \alpha x - \beta y$$

καὶ ἡ (1,4,1) γίνεται:

(1,4,3) $f(x,y,z) = f(x,y,\ \gamma - ax - \beta y) = F(x,y)$

Β ῆ μ α 2ον

Εὑρίσκομε τὰ σημεῖα στάσεως τῆς συναρτήσεως F(x,y) ἐκ τῆς λύσεως τοῦ συστήματος

(1,4,4) $\dfrac{\partial F}{\partial x} = 0, \qquad \dfrac{\partial F}{\partial y} = 0$

Β ῆ μ α 3ον

Σχηματίζομεν διὰ τὰ σημεῖα στάσεως τὴν τετραγωνικὴν μορφὴν

(1,4,5) $Q(h_1,h_2) = [h_1\ h_2] \begin{bmatrix} \dfrac{\partial^2 F}{\partial x^2} & \dfrac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \\ \dfrac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} & \dfrac{\partial^2 F}{\partial y^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix}$

α) Ἐὰν ἡ τετραγωνικὴ μορφὴ $Q(h_1,h_2)$ εἶναι θετικῶς ὡρισμένη, δηλαδὴ ἐὰν εἶναι:

$$(1,4,6) \qquad D_1 = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} > 0, \qquad D_2 = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial^2 F}{\partial x^2}, & \dfrac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \\ & \\ \dfrac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} & \dfrac{\partial^2 F}{\partial x^2} \end{vmatrix} > 0$$

θὰ ἔχωμεν ἐλαχίστην τιμὴν διὰ τὴν συνάρτησιν $F(x,y)$.

β) Ἐὰν ἡ τετραγωνικὴ μορφὴ $Q(h_1, h_2)$ εἶναι ἀρνητικῶς ὡρισμένη, δηλαδὴ ἐὰν εἶναι:

$$(1,4,7) \qquad D_1 = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} < 0, \qquad D_2 = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial^2 F}{\partial x^2} & \dfrac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \\ & \\ \dfrac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} & \dfrac{\partial^2 F}{\partial y^2} \end{vmatrix} > 0$$

θὰ ἔχωμεν μεγίστην τιμὴν διὰ τὴν συνάρτησιν $F(x,y)$.

2. ΛΥΣΙΣ ΤΟΥ ΠΡΟΤΑΘΕΝΤΟΣ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ

2.1. Ἔχοντες ὑπ' ὄψιν τὸ λῆμμα (1,2) καὶ θέτοντες $n = z + y + x$, οἱ ζητούμενοι ἀκέραιοι ἀριθμοὶ x_i θὰ ἐπαληθεύουν τὰς σχέσεις

$$(2,1,1) \qquad \begin{aligned} & x_1 = x_2 = \ldots = x_x = 1 \\ & x_{x+1} = x_{x+2} = \ldots = x_{x+y} = 2 \\ & x_{x+y+1} = x_{x+y+2} = \ldots = x_{x+y+z} = 3 \end{aligned}$$

Συνεπῶς τὸ πρόβλημα (1,1) ἀνάγεται εἰς τὸν ὑπολογισμὸν τῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν (x,y,z) τοιούτων ὥστε νὰ εἶναι

$$(2,1,2) \qquad x + 2y + 3z = c$$

καὶ νὰ μεγιστοποιοῦν τὸ γινόμενον

$$(2,1,3) \qquad P(x,y,z) = 1^1\,1^2 \ldots 1^x . 2^{x+1} . 2^{x+2} \ldots 2^{x+y} . 3^{x+y+1} . 3^{x+y+2} \ldots 3^{x+y+z}$$

ἤ

$$(2,1,4) \qquad P(x,y,z) = 1^{\frac{x(x+1)}{2}} . 2^{\frac{(2x+y+1)y}{2}} . 3^{\frac{(2x+2y+z+1)z}{2}}$$

Ἡ μεγιστοποίησις τοῦ γινομένου P(x,y,z) εἶναι ἰσοδύναμος πρὸς τὴν μεγιστοποίησιν τῆς συναρτήσεως

$$(2,1,5) \qquad f(x,y,z) = \frac{(2x+y+1)y}{2}\log 2 + \frac{(2x+2y+z+1)z}{2}\log 3$$

τῶν μεταβλητῶν x,y,z συνδεομένων διὰ τῆς σχέσεως (2,1,2).

Ἔχοντες ὑπ' ὄψιν τὴν (2,1,2) ἡ (2,1,5) γίνεται:

$$(2,1,6) \qquad F(y,z) = -\frac{3}{2}\log 2 \cdot y^2 - (3\log 2 + \log 3)yz - \frac{5}{2}\log 3 \cdot z^2 +$$

$$\log 2(c + 1/2)y + \log 3(c + 1/2)z$$

Διὰ τὴν μεγιστοποίησιν τῆς (2,1,6) τὰ y,z πρέπει, ἕνεκα τῶν (1,4,4) καὶ (1,4,7), νὰ ἐπαληθεύουν τὰς σχέσεις:

$$(2,1,7) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial y} = -3\log 2 \cdot y - (3\log 2 + \log 3)z + (c + \tfrac{1}{2})\log 2 = 0 \\[2ex] \dfrac{\partial F}{\partial z} = (-3\log 2 + \log 3)y - 5\log 3 \cdot z + (c + \tfrac{1}{2})\log 3 = 0 \end{cases}$$

$$(2,1,8)\quad \begin{cases} D_1 = \dfrac{\partial^2 F}{\partial y^2} = -3\log 2 \\[2ex] D_2 = \begin{vmatrix} -3\log 2 & -(3\log 2 + \log 3) \\ -(3\log 2 + \log 3) & -5\log 3 \end{vmatrix} = -9(\log 2)^2 + 9(\log 2)(\log 3) - (\log 3)^3 \end{cases}$$

καὶ ἐπειδὴ εἶναι $\log 2 = 0{,}69315$, $\log 3 = 1{,}09861$, εὑρίσκομεν:

$$(2,1,9)\quad D_1 = -2{,}07945\,, \qquad D_2 = 1{,}20377$$

Ἄρα ἡ λύσις τοῦ συστήματος (2,1,7) καθιστᾶ μεγίστην τὴν συνάρτησιν (2,1,6).

Ἐκ τῶν (2,1,7) εὑρίσκομε

$$(2,1,10)\quad \begin{aligned} y^* &= (c+\tfrac{1}{2})\,\frac{(\log 3)^2 - 2(\log 2)(\log 3)}{9(\log 2)^2 - 9(\log 2)(\log 3) + (\log 3)^2} \\ &= (c+\tfrac{1}{2})\,\frac{1-2\alpha}{9\alpha^2 - 9\alpha + 1} \\[2ex] z^* &= (c+\tfrac{1}{2})\,\frac{-2(\log 2)(\log 3) + 3(\log 2)^2}{9(\log 2)^2 - 9(\log 2)(\log 3) + (\log 3)^2} \\ &= (c+\tfrac{1}{2})\,\frac{3\alpha^2 - 2\alpha}{9\alpha^2 - 9\alpha + 1} \end{aligned}$$

$$\left(\text{ὅπου:}\quad \alpha = \frac{\log 2}{\log 3} = \frac{0{,}69315}{1{,}09861} = 0{,}63093\right)$$

Προφανῶς οἱ ἀριθμοὶ y^*, z^* δὲν εἶναι ἀκέραιοι. Πράγματι, ὁ ἀρ

$\alpha = \dfrac{\log 2}{\log 3}$ εἶναι ἄρρητος. Διότι, ἐὰν ἦτο ρητός, θὰ εἴχαμε $\dfrac{\log 2}{\log 3} = \dfrac{k}{\lambda}$ $(k,\lambda \in Z)$, ἐκ τῆς ὁποίας προκύπτει ἡ σχέσις $2^\lambda = 3^k$ καὶ ἡ ὁποία εἶναι ἀδύνατος. Ἀποδεικνύεται, ἐπίσης[4], (ch. 3) ὅτι ὁ ἀριθμὸς α εἶναι ὑπερβατικός, ἑπομένως καὶ οἱ ἀριθμοὶ y^*, z^* θὰ εἶναι ὑπερβατικοί, διότι ἐὰν π.χ. ὁ ἀριθμὸς y^* δὲν εἶναι ὑπερβατικός, θὰ εἶναι ἀλγεβρικός, δηλαδὴ ρίζα ἑνὸς πολυωνύμου μὲ ἀκεραίους συντελεστὰς καὶ συνεπῶς καὶ ὁ α θὰ εἶναι ἀριθμὸς ἀλγεβρικός.

2.2. Θὰ ἀποδείξωμεν ἤδη τὸ ἀκόλουθον θεώρημα:

ΘΕΩΡΗΜΑ: Ἡ μεγίστη τιμὴ τῆς συναρτήσεως (2,1,6) διὰ δεδομένην τιμὴν τῆς σταθερᾶς c καὶ ὅταν αἱ μεταβληταὶ y, z λαμβάνουν ἀκεραίας τιμάς, θὰ εἶναι ἡ μεγίστη ἐκ τῶν τιμῶν

$$F([y^*],[z^*]),\quad F([y^*]+1,[z^*]),\quad F([y^*],[z^*]+1),\quad F([y^*]+1,[z^*]+1) \tag{2,2,1}$$

Ἀπόδειξις

Διὰ τὴν ἀπόδειξιν τοῦ ἀνωτέρω θεωρήματος θέτομεν εἰς τὴν συνάρτησιν (2,1,6)

$$y = y^* + \Upsilon, \qquad z = z^* + Z \tag{2,2,2}$$

καὶ ἔχοντες ὑπ' ὄψιν τὰς (2,1,7) εὑρίσκομεν:

$$F(y,z) = F(y^*,z^*) - \frac{\log 3}{2}\,[3\alpha\Upsilon^2 + 2(3\alpha+1)\Upsilon Z + 5Z^2] \tag{2,2,3}$$

Θέτοντες:

$$\Phi(\Upsilon,Z) = 3\alpha\Upsilon^2 + 2(3\alpha+1)\Upsilon Z + 5Z^2 \tag{2,2,4}$$

διὰ νὰ γίνῃ ἡ (2,1,6) μεγίστη, μὲ x καὶ y ἀκεραίους ἀριθμούς, ἀρκεῖ ἡ (2,2,4) νὰ γίνῃ ἐλαχίστη. Ἡ (2,2,4) λαμβάνει τιμὰς θετικὰς διὰ πᾶσαν τιμὴν τῶν Υ,Z.

Ἡ (2,2,4) δύναται νὰ γραφῇ καὶ ὡς κάτωθι:

$$(2,2,5) \qquad \Phi(\Upsilon,Z) = [\sqrt{3\alpha}\Upsilon + \frac{3\alpha+1}{\sqrt{3\alpha}} Z]^2 + \frac{-9\alpha^2+9\alpha-1}{3\alpha} Z^2$$

Ἐὰν z εἶναι ὁ πλησιέστερος ἀκέραιος ἀριθμὸς πρὸς τὸν z* καὶ y ὁ πλησιέστερος ἀκέραιος ἀριθμὸς πρὸς τὸν $\sqrt{3\alpha}y^* + \frac{3\alpha+1}{\sqrt{3\alpha}}(Z - Z^*)$, τότε θὰ εἶναι:

$$-\tfrac{1}{2} \leqslant Z \leqslant \tfrac{1}{2}, \qquad -\tfrac{1}{2} \leqslant \sqrt{3\alpha}\Upsilon + \frac{3\alpha+1}{\sqrt{3\alpha}} Z \leqslant \tfrac{1}{2}$$

καὶ συνεπῶς ἡ (2,2,4) γίνεται:

$$\Phi(\Upsilon,Z) \leqslant \frac{1}{4} + \frac{-9\alpha^2+9\alpha-1}{12\alpha} = \frac{-9\alpha^2+12\alpha-1}{12\alpha}$$

Δυνάμεθα συνεπῶς πάντοτε νὰ εὕρωμε ἀκεραίους ἀριθμοὺς y,z τοιούτους ὥστε νὰ εἶναι:

$$(2,2,6) \qquad \Phi(\Upsilon,Z) \leqslant \frac{-9\alpha^2+12\alpha-1}{12\alpha}$$

Ἀντιστρόφως, ἐὰν λάβωμεν:

$$Z > \sqrt{\frac{-9\alpha^2+12\alpha-1}{12\alpha} \cdot \frac{3\alpha}{-9\alpha^2+9\alpha-1}} = 0{,}82574$$

θὰ ἔχωμεν:

$$\Phi(\Upsilon,Z) > \frac{-9\alpha^2+12\alpha-1}{12\alpha}$$

Συνεπῶς τὸ ἐλάχιστον τῆς (2,2,4) λαμβάνεται ὅταν εἶναι

$$-0{,}82574 < Z < 0{,}82574$$

δηλαδὴ ὅταν τὸ z λάβῃ τὰς τιμὰς $[Z^*]$ ἢ $[Z^*]+1$, ἔνθα, ὡς γνωστόν, $[Z^*]$ τὸ ἀκέραιον μέρος τοῦ Z^*.

Ὁμοίως, ἐπειδὴ ἡ (2,2,4) δύναται νὰ γραφῇ καὶ ὡς κάτωθι

$$(2,2,7) \qquad \Phi(\Upsilon,Z) = [\frac{3\alpha+1}{\sqrt{5}}\,\Upsilon + \sqrt{5}Z]^2 + \frac{-9\alpha^2+9\alpha-1}{5}\,\Upsilon^2$$

ἐργαζόμενοι ὡς ἀνωτέρω, ἕπεται ὅτι τὸ ἐλάχιστον τῆς (2,2,4) λαμβάνεται ὅταν εἶναι

$$-0{,}69148 < \Upsilon < 0{,}69148$$

δηλαδὴ ὅταν τὸ y λάβῃ τὰς τιμὰς $[y^*]$ ἢ $[y^*]+1$.

3. ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΣ ΔΙΑ ΤΗΝ ΛΥΣΙΝ ΤΟΥ ΠΡΟΤΑΘΕΝΤΟΣ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ

3.1. Δοθέντος τοῦ σταθεροῦ ἀριθμοῦ c καὶ ἔχοντες ὑπ' ὄψιν τὰ ἀνωτέρω ἀποδειχθέντα θεωρήματα, ἀκολουθοῦμε τὸν κάτωθι ἀλγόριθμον διὰ τὴν λύσιν τοῦ προταθέντος προβλήματος.

Β ῆ μ α 1ον

Ὑπολογίζομε τὰ y^* z^* ἐκ τῶν τύπων (2,1,10)

$$y^* = (c+\tfrac{1}{2})\,\frac{1-2\alpha}{9\alpha^2-9\alpha+1} = (c+\tfrac{1}{2})\,0{,}28692$$

(3,1,1)

$$z^* = (c+\tfrac{1}{2})\,\frac{3\alpha^2-2\alpha}{9\alpha^2-9\alpha+1} = (c+\tfrac{1}{2})\,0{,}06174$$

Β ῆ μ α 2ον

Ὑπολογίζομε τὰς τιμὰς τῆς συναρτήσεως (2,1,6)

$$(3,1,2) \quad F(y,z) = -1{,}03972y^2 - 3{,}17806yZ - 2{,}74652Z^2 + (0{,}69315.c + 0{,}34657)y + (1{,}09861.c + 0{,}54930)z$$

διὰ τὰ ζεύγη τῶν τιμῶν

$$(3,1,3) \quad \begin{pmatrix} y = [y^*] \\ z = [z^*], \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y = [y^*] + 1 \\ z = [z^*], \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y = [y^*] \\ z = [z^*] + 1, \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y = [y^*] + 1 \\ z = [z^*] + 1 \end{pmatrix}$$

καὶ ἐκλέγομε τὸ ζεῦγος y, z, τὸ ὁποῖον καθιστᾶ μεγαλυτέραν τὴν τιμὴν τῆς συναρτήσεως F(y,z).

Β ῆ μ α 3ον

Ἐκ τῶν εὑρεθέντων y, z ὑπολογίζομεν ἐκ τῆς (2,1,2) τὴν τιμὴν τοῦ x

$$(3,1,4) \quad x = c - 2y - 3z$$

Β ῆ μ α 4ον

Ὑπολογίζομε τὴν μεγίστην τιμὴν τοῦ γινομένου

$$(3,1,5) \quad \prod_{i=1}^{n} x_i^n = 2^{1/2(2x+y+1)y} \cdot 3^{1/2(2x+2y+z+1)z}$$

ἢ τὴν τιμὴν

$$(3,1,6) \quad f(x,y,z) = \log \prod_{i=1}^{n} x_i{}^n = (2x+y+1)y \, \frac{\log 2}{2} + (2x+2y+z+1)z \, \frac{\log 3}{2}$$

3.2. Ἀριθμητικὰ παραδείγματα

Ἀκολουθοῦντες τὸν ἀνωτέρω ἀλγόριθμον εὕρομεν διὰ τοῦ ἠλεκτρονικοῦ ὑπολογιστοῦ univac 1106 εἰς χρόνον 5″(CPV time) τὰ κάτωθι ἀποτελέσματα:

c = 100 :	x = 34,	y = 24,	z = 6,	f(x,y,z) = 2395,	10397
c = 105 :	x = 35,	y = 26,	z = 6,	f(x,y,z) = 2716,	43140
c = 110 :	x = 37,	y = 26,	z = 7,	f(x,y,z) = 2823,	88486
c = 115 :	x = 38,	y = 28,	z = 7,	f(x,y,z) = 3172,	20642
c = 120 :	x = 40,	y = 28,	z = 8,	f(x,y,z) = 3287,	92554
c = 125 :	x = 41,	y = 30,	z = 8,	f(x,y,z) = 3663,	24130
c = 130 :	x = 44,	y = 31,	z = 8,	f(x,y,z) = 3996,	78372
c = 135 :	x = 45,	y = 33,	z = 8,	f(x,y,z) = 4409,	15106
c = 140 :	x = 47,	y = 33,	z = 9,	f(x,y,z) = 4545,	53430
c = 145 :	x = 48,	y = 35,	z = 9,	f(x,y,z) = 4984,	89581
c = 150 :	x = 50,	y = 35,	z = 10,	f(x,y,z) = 5129,	54468
c = 155 :	x = 52,	y = 38,	z = 9,	f(x,y,z) = 5849,	27124
c = 160 :	x = 54,	y = 38,	z = 10,	f(x,y,z(= 6006,	31854
c = 165 :	x = 55,	y = 40,	z = 10,	f(x,y,z) = 6509,	72583
c = 170 :	x = 57,	y = 40,	z = 11,	f(x,y,z) = 6675,	03882
c = 175 :	x = 58,	y = 42,	z = 11,	f(x,y,z) = 7205,	44031
c = 180 :	x = 61,	y = 43,	z = 11,	f(x,y,z) = 7670,	27836
c = 185 :	x = 62,	y = 45,	z = 11,	f(x,y,z) = 8237,	73145
c = 190 :	x = 64,	y = 45,	z = 12,	f(x,y,z) = 8423,	70850
c = 195 :	x = 65,	y = 47,	z = 12,	f(x,y,z) = 9018,	15576
c = 200 :	x = 67,	y = 47,	z = 13,	f(x,y,z) = 9212,	39856

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

1. *Nicolas, J. L.:* Sur un probleme d'optimisation ennombres entiers de T. L. Saaty. Revue Française d'Automatique Informatique Recherche Operationnelle (V. 2, Juin 1975).
2. *Saaty, T. L.:* Optimization in integers and related extrenal problems (McGraw Hill, 1970).
3. *Βαρελᾶς, Γ. Δ.:* Γενικὰ Μαθηματικά, Τόμος IV. ('Αφοὶ Σάκκουλα, Θεσσαλονίκη 1974).
4. *Lang, S.:* Intoduction to the transcendental numbers (New York, Addison Wesley, 1966).