SUR LES COURBES DONT LA COURBURE ET LA TORSION SATISFONT À UNE RELATION ALGÉBRIQUE

GEORGES VARELAS

SUR LES COURBES DONT LA COURBURE ET LA TORSION SATISFONT À UNE RELATION ALGÉBRIQUE*

Par

Georges Varelas

I. Introduction

Soit une courbe (γ), dont le vecteur unitaire $\bar{n}$ de la normale principale est une fonction donnée $\bar{n} = \bar{n}(s)$ de l' arc s de la courbe et dont ses rayons ϱ et τ de courbure et de torsion satisfont à la relation :

$$\text{(I, 1)} \qquad \frac{A}{\varrho^2} + \frac{2B}{\varrho\tau} + \frac{C}{\tau^2} = 1.$$

Alors, en considérant les vecteurs

$$\bar{v}_1 = \int u_1 \, \bar{n} \, ds + \bar{c}_1, \quad \bar{v}_2 = \int u_2 \, \bar{n} \, ds + \bar{c}_2,$$

l' équation vectorielle, la courbure et la torsion de la courbe (γ) seront données (Voir [1] page 48,49) par les formules :

$$\text{(I, 2)} \qquad \bar{r} = \int [A_1 \bar{v}_1 + B_1 (\bar{v}_1 \times \bar{n})] \, ds + \bar{c}_1^*$$

$$\text{(I, 3)} \qquad \frac{1}{\varrho} = A_1 u_1 - B_1 (\bar{v}_1, \bar{n}, \bar{n}')$$

$$\text{(I, 4)} \qquad \frac{1}{\tau} = B_1 u_1 + A_1 (\bar{v}_1, \bar{n}, \bar{n}')$$

ou encore par les formules :

$$\text{(I, 5)} \qquad \bar{r} = \int [A_2 \bar{v}_2 + B_2 (\bar{v}_2 \times \bar{n})] \, ds + \bar{c}_2^*$$

$$\text{(I, 6)} \qquad \frac{1}{\varrho} = A_2 u_2 - B_2 (\bar{v}_2, \bar{n}, \bar{n}')$$

* Cette note a été communiquée au IIIe Congrès Interbalcanique des Mathématiciens à Bucareste le 13/9/1966.

$$(I,\ 7)\qquad \frac{1}{\tau} = B_2 u_2 + A_2 (\nabla_2, \bar{n}, \bar{n}')$$

où A_1, B_1, A_2, B_2, sont les nombres constants:

$$A_1 = \frac{a_1}{a_1^2 + b_1^2},\quad B_1 = \frac{b_1}{a_1^2 + b_1^2},\quad A_2 = \frac{a_2}{a_2^2 + b_2^2},\quad B_2 = \frac{b_2}{a_2^2 + b_2^2},$$

et u_1, u_2 fonctions de l' arc s de la courbe.

Les nombres A, B, C sont donnés et les nombres a_1, b_1, a_2, b_2, s' obtiennent si l' on décompose en produit de facteurs le premier membre de (I, 1), c' est-à-dire si l' on suppose que

$$\frac{A}{\varrho^2} + \frac{2B}{\varrho\tau} + \frac{C}{\tau^2} = \left(\frac{a_1}{\varrho} + \frac{b_1}{\tau}\right)\left(\frac{a_2}{\varrho} + \frac{b_2}{\tau}\right)$$

et les fonctions u_1, u_2 s' obtiennent si l' on pose

$$(I,\ 8)\qquad u_1 = \frac{a_1}{\varrho} + \frac{b_1}{\tau}\qquad u_2 = \frac{a_2}{\varrho} + \frac{b_2}{\tau}$$

Les fonctions u_1, u_2 à cause de la relation (I, 1) sont obligées de satisfaire à l' équation

$$(I,\ 9)\qquad u_1 u_2 = 1.$$

Puisque les valeurs de $\frac{1}{\varrho}$ données par les formules (I, 3) et (I, 6) sont les mêmes, les fonctions u_1, u_2 de l'arc s de la courbe doivent satisfaire (voir [I], page 54) le système des équations:

$$(X)\begin{cases} (I,\ 9) & u_1 u_2 = 1 \\ (I,\ 10) & [A_1 (\bar{n}'\bar{n}'') + B_1 (\bar{n}, \bar{n}', \bar{n}''')]\, u_1 + [A_2 (\bar{n}'\bar{n}'') + \\ & B_2 (\bar{n}, \bar{n}', \bar{n}'')]\, u_2 + A_1 (\bar{n}\bar{n}'')\, u_1' + A_2 (\bar{n}\bar{n}'')\, u_2' = 0 \end{cases}$$

Demême, puisque les valeurs de $\frac{1}{\tau}$ données par les formules (I, 4) et (I, 7) sont les mêmes, on trouve que les fonctions u_1, u_2 de l'arc s de la courbe doivent satisfaire le système des équations:

$$(XX)\begin{cases} (I,\ 9) & u_1 u_2 = 1 \\ (I,\ 11) & [B_1 (\bar{n}'\bar{n}'') - A_1 (\bar{n}, \bar{n}', \bar{n}'')]\, u_1 + [B_2 (\bar{n}'\bar{n}'') - \\ & A_2 (\bar{n}, \bar{n}', \bar{n}'')]\, u_2 + B_1 (\bar{n}\bar{n}'')\, u_1' + B_2 (\bar{n}\bar{n}'')\, u'_2 = 0. \end{cases}$$

Dans cette note nous allons d' abord intégrer les systèmes (X) et (XX) pour trouver l' équation vectorielle d' une courbe (γ), pour laquelle existe la relation (I, 1) et finalement nous allons donner les conditions nécessaires et suffisantes pour que les solutions des deux systèmes coïncident.

II. Intégration du système des équations (X)

Posons pour abréger:

$$(II,\ 1)\qquad \begin{cases} f_1 = f_1(s) = A_1(\bar{n}'\bar{n}'') + B_1(\bar{n}, \bar{n}', \bar{n}'') \\ f_2 = f_2(s) = A_2(\bar{n}'\bar{n}'') + B_2(\bar{n}, \bar{n}', \bar{n}'') \\ f_3 = f_3(s) = A_1(\bar{n}\bar{n}'') \\ f_4 = f_4(s) = A_2(\bar{n}\bar{n}'') \end{cases}$$

Alors l' équation (I, 10) devient :

$$(II,\ 2)\qquad f_1 u_1 + f_2 u_2 + f_3 u_1' + f_4 u_2' = 0.$$

En dérivant (I, 9), on obtient:

$$(II,\ 3)\qquad u_1' u_2 + u_1 u_2' = 0$$

Ainsi la solution du système des équations (X) se ramène à la solution du système des équations différentielles (II, 2) (II, 3).

Si l' on suppose que $f_3 u_1 - f_4 u_2 \neq 0$, on obtient:

$$(II,\ 4)\qquad \frac{du_1}{ds} = -\frac{f_1u_1 + f_2u_2}{f_3u_1 - f_4u_2}\, u_1$$

$$(II,\ 5)\qquad \frac{du_2}{ds} = \frac{f_1u_1 + f_2u_2}{f_3u_1 - f_4u_2}$$

Si l' on pose

$$(II,\ 6)\qquad u_1 = yu_2$$

on aura

$$(II,\ 7)\qquad \frac{dy}{ds} + \frac{2f_1y^2 + 2f_2y}{f_3y - f_4} = 0$$

Pour la résolution de l' équation différentielle (II, 7) distingons les cas suivants:

1er Cas. Supposons que les fonctions f_1, f_2, f_3, f_4 sont continues pour $s_1 < s < s_2$, $f_3 \neq 0$ et encore que $f_3y - f_4$ divise $2f_1y^2 + 2f_2y$, ce qui entraîne la condition:

$$(II,\ 8)\qquad f_1f_4 + f_2f_3 = 0.$$

Dans ce cas la fonction vectorielle $\bar{n}(s)$ doit vérifier l'équation

$$(II,\ 9)\qquad 2A_1A_2(\bar{n}'\bar{n}'') + (A_1B_2 + A_2B_1)(\bar{n}, \bar{n}', \bar{n}'') = 0$$

et l'équation différentielle (II, 7) devient :

$$\frac{dy}{ds} + \frac{2f_1}{f_3}\, y = 0 \qquad \text{ou} \qquad \frac{dy}{y} = -\frac{2f_1}{f_3}\, ds$$

et par intégration, on obtient:

(II, 10) $$y = \frac{u_1}{u_2} = \alpha^2 e^{-\int \frac{2f_1}{f_3} ds}$$

De celle-ci et de (I, 5) on trouve:

(II, 11) $$u_1 = \alpha e^{-\int \frac{f_1}{f_3} ds} \qquad u_2 = \alpha^{-1} e^{\int \frac{f_1}{f_3} ds}$$

Si nous remplaçons dans (I, 2) les valeurs trouvées des u_1, u_2, nous aurons l'équation vectorielle de la courbe demandée (γ).

2me Cas. Supposons aussi que les fonctions f_1, f_2, f_3, f_4 sont continues pour $s_1 < s < s_2$, $f_3 \neq 0$ et maintenant $f_3 y - f_4$ ne divise pas $2f_1 y^2 + 2f_2 y$.

Alors, (voir [2] page 82), si

(II, 12) $$4f_1 f_4 + 2f_2 f_3 + f_3 f_4' - f_3' f_4 = 0.$$

c'est-à-dire, si la fonction vectorielle $\bar{n}(s)$ vérifie l'équation

(II, 13) $$3A_1A_2(\bar{n}'\bar{n}'') + (A_1B_2 + 2A_2B_1)(\bar{n}, \bar{n}', \bar{n}'') = 0$$

la solution $y = y(s)$ de l'équation différentielle (II, 7) sera donnée par l'équation:

(II, 14) $$f_3 F y^2 - 2f_4 F y + \beta = 0$$

avec β = constant et $F = e^{\int \frac{4f_1 - f_3'}{f_3} ds}$.

Des rélations (I, 5) et (II, 6) on trouve:

$$u_1 = y^{\frac{1}{2}}, \qquad u_2 = y^{-\frac{1}{2}}$$

Les fonctions u_1, u_2 étant trouvées l'équation vectorielle de la courbe (γ) sera donnée par (I, 2) ou (I, 3).

III. Intégration du système des équations (XX)

Posons, pour abréger:

(III, 1) $$\begin{cases} \varphi_1 = \varphi_1(s) = B_1(\bar{n}'\bar{n}'') - A_1(\bar{n}, \bar{n}', \bar{n}'') \\ \varphi_2 = \varphi_2(s) = B_2(\bar{n}'\bar{n}'') - A_2(\bar{n}, \bar{n}', \bar{n}'') \\ \varphi_3 = \varphi_3(s) = B_1(\bar{n}, \bar{n}'') \\ \varphi_4 = \varphi_4(s) = B_2(\bar{n}, \bar{n}'') \end{cases}$$

et procédant de la même façon que dans le paragraphe précédent on a respectivement les résultats suivants:

1er Cas. Si

(III, 9) $2B_1B_2(\bar{n}'\bar{n}'') - (A_1B_2 + A_2B_1)(\bar{n}, \bar{n}', \bar{n}'') = o$

on a

(III, 11) $$u_1 = \alpha^* e^{-\int \frac{\varphi_1}{\varphi_3} ds} \qquad u_2 = \frac{1}{\alpha^*} e^{\int \frac{\varphi_1}{\varphi_3} ds}$$

2me Cas. Si

(III, 13) $3B_1B_2(\bar{n}'\bar{n}'') - (2A_1B_2 + A_2B_1)(\bar{n}, \bar{n}', \bar{n}'') = o,$

la fonction $y = \frac{u_1}{u_2}$ est donnée par l' équation

(III, 14) $\varphi_3 \Phi y^2 - 2\varphi_4 \Phi y + \beta^* = 0$

avec $\beta^* =$ constant et $\Phi = e^{\int \frac{4\varphi_1 - \varphi_3'}{\varphi_3} ds}$

IV. Conditions nécessaires et suffisantes, pour que les solutions des deux systèmes (x) et (xx) coïncident

I cas. Nous avons vu, que si

(II, 9) $2A_1A_2(\bar{n}'\bar{n}'') + (A_1B_2 + A_2B_1)(\bar{n}, \bar{n}', \bar{n}'') = 0$

nous aurons

(II, 11) $$u_1 = \alpha e^{-\int \frac{f_1}{f_3} ds} \qquad u_2 = \alpha^{-1} e^{\int \frac{f_1}{f_3} ds}$$

et si

(III, 9) $2B_1B_2(\bar{n}'\bar{n}'') - (A_1B_2 + A_2B_1)(\bar{n}, \bar{n}', \bar{n}'') = 0$

nous aurons

(III, 11) $$u_1 = \alpha^* e^{-\int \frac{\varphi_1}{\varphi_3} ds} \qquad u_2 = \alpha^{*-1} e^{\int \frac{\varphi_1}{\varphi_2} ds}$$

Pour que les équations vectorielles (I, 2) et (I, 5) représentent la même courbe, il faut et il suffit que $\alpha = \alpha^*$, et que les fonctions u_1 et u_2 que nous prenons des formules (II, 11), (III, 11) coïncident, c' est-à-dire que:

$$\frac{f_1}{f_3} = \frac{\varphi_1}{\varphi_3} \text{ ou } \frac{A_1(\bar{n}'\bar{n}'') + B_1(\bar{n}, \bar{n}', \bar{n}'')}{A_1(\bar{n}\bar{n}'')} = \frac{B_1(\bar{n}'\bar{n}'') - A_1(\bar{n}, \bar{n}'\bar{n}'')}{B_1(\bar{n}\bar{n}'')}$$

ou encore que

(IV, 1) $(A_1^2 + B_1^2)(\bar{n}, \bar{n}', \bar{n}'') = o$

De cette équation-ci (IV, 1) et de celles-là (II, 9), (III, 9) il s' en suit, que le vecteur unitaire $\bar{n}(s)$ de la normale principale doit vérifier les conditions:

(IV, 2) $(\bar{n}, \bar{n}', \bar{n}'') = 0, \qquad \bar{n}'\bar{n}'' = 0.$

II Cas. Si $f_3y - f_4$ ne divise pas $f_1y^2 + f_2y$ et si $\varphi_3y - \varphi_4$ ne divise pas $\varphi_1y^2 + \varphi_2v$, alors il faut et il suffit que

1° le système des équations

(II, 13) $3A_1A_2(\bar{n}'\bar{n}'') + (A_1B_2 + 2A_2B_1)(\bar{n}, \bar{n}'\bar{n}'') = 0$

(III, 13) $3B_1B_2(\bar{n}'\bar{n}'') - (2A_1B_2 + A_2B_1)(\bar{n}, \bar{n}', \bar{n}'') = 0$

ait une solution différente de zéro, et

2° les équations

(II, 14) $f_3Fy^2 - 2f_4Fy + \beta = 0$

(III, 14) $\varphi_3\Phi y^2 - 2\varphi_4\Phi y + \beta^* = 0$

aient une solution commune. C' est-à-dire il faut et il suffit que

$$(IV, 3) \quad \begin{cases} \dfrac{A_1A_2}{B_1B_2} = -\dfrac{A_1B_2 + 2A_2B_1}{2A_1B_2 + A_2B_1} \\ (c_1f_3F - c\varphi_3\Phi)^2 - 2(f_3\varphi_4 - f_4\varphi_3)(c_1f_4F - C\varphi_4\Phi)F\Phi = 0 \end{cases}$$

BIBLIOGRAPHIE :

[1] S. Sarantopoulos : Bulletin de la Société Mathématique de Grèce. Vol. 7 Fasc. 1 - 1966.

[2] G. Julia : Exercices d' Analyse. Tome III — Fascicule I.