ΓΕΝΙΚΕΥΣΙΣ ΤΩΝ ΤΥΠΩΝ ΤΩΝ FRENET - SERRET

ΓΕΩΡΓΙΟΥ Δ. ΒΑΡΕΛΑ
Τακτικοῦ Καθηγητοῦ τῶν
Γενικῶν καὶ Οἰκονομικῶν Μαθηματικῶν
τῆς Α.Β.Σ.Θ.

ΓΕΝΙΚΕΥΣΙΣ ΤΩΝ ΤΥΠΩΝ ΤΩΝ FRENET - SERRET (*)

Εἰσαγωγὴ

§ 1. Ὡς γνωστόν, ἡ σπουδὴ τοῦ σχήματος μιᾶς καμπύλης C, εἰς τὴν περιοχὴν ἑνὸς σημείου αὐτῆς, καθὼς καὶ πολλαὶ ἄλλαι ἰδιότητες τῆς καμπύλης ταύτης, ἀναφέρονται εἰς τὸ συνοδεῦον τρίεδρον τῆς καμπύλης, δηλαδὴ τὸ τρίεδρον τὸ ἔχον κορυφὴν τὸ ἐν λόγῳ σημεῖον M καὶ ἀκμὰς τὰς τρεῖς πρωτευούσας ἡμιευθείας, ἤτοι τὴν ἐφαπτομένην Mx τὴν κάθετον My καὶ τὴν ὀρθίαν κάθετον Mz. Ἐὰν **t**, **n**, **b** εἶναι τὰ μοναδιαῖα διανύσματα ἐπὶ τῶν τριῶν τούτων ἀρχικῶν ἡμιευθειῶν καὶ ἐὰν ὑποθέσωμεν, ὅτι ἐξ ἑνὸς οἱουδήποτε σημείου O, π.χ. τῆς ἀρχῆς τῶν συντεταγμένων, φέρομεν διανύσματα παράλληλα καὶ ὁμόρροπα πρὸς τὰ **t**, **n**, **b**, κατὰ τὴν κίνησιν τοῦ σημείου M ἐπὶ τῆς καμπύλης, τὰ πέρατα ἑκάστης τῶν τριῶν τούτων κατευθύνσεων γράφουν ἐπὶ τῆς σφαίρας τοῦ Gauss, δηλαδὴ τῆς σφαίρας μὲ κέντρον τὸ O καὶ ἀκτῖνα τὴν μονάδα, μίαν σφαιρικὴν καμπύλην, τὴν ὁποίαν ὀνομάζομεν σφαιρικὴν δείκτριαν. Ἐὰν καλέσωμεν s_1, s_2, s_3, ἀντιστοίχως τὰ τόξα τῶν τριῶν τούτων δεικτριῶν καὶ s τὸ τόξον τῆς καμπύλης C, λαμβάνομεν τοὺς γνωστοὺς τύπους τῆς καμπυλότητος, μικτῆς καμπυλότητος καὶ στρέψεως:

$$(1,1)\quad \frac{ds_1}{ds} = \frac{1}{\rho} \geqq 0 \text{ (1)}$$

$$(1,2)\quad \frac{ds_2}{ds} = \frac{1}{w} \geqq 0 \text{ (2)}$$

$$(1,3)\quad \frac{ds_3}{ds} = \frac{\varepsilon}{\tau} \geqq 0 \qquad (\varepsilon = \pm 1) \text{ (3)}$$

ἔνθα ἐπὶ τῶν τόξων s, s_1, s_2, s_3 ὁρίζεται τοιαύτη θετικὴ φορά, ὥστε τὰ s_1, s_2, καὶ s_3 νὰ συναυξάνονται μετὰ τοῦ s.

---

* Ἡ ἐργασία αὕτη ἀνηγγέλθη πρὸς ἀνακοίνωσιν διὰ τὴν 19ην-9-1968 εἰς τὸ VII Μαθηματικὸν Συνέδριον ἐν Linz τῆς Αὐστρίας (VII Österreichischer Mathematikerkongress, Linz. 16 - 20 September 1968), μὴ πραγματοποιηθείσης, λόγῳ τῆς μὴ χορηγήσεως ἀδείας μεταβάσεως μου ἐν Αὐστρίᾳ ἕνεκεν τῶν εἰσαγωγικῶν ἐξετάσεων τῶν Ἀνωτάτων Ἐκπαιδευτικῶν Ἱδρυμάτων. Περίληψις τῆς ἐργασίας αὐτῆς ἐδημοσιεύθη εἰς τὰ πρακτικὰ τοῦ Συνεδρίου (Voetragsauszüge).

1. Σ. Σαραντοπούλου: Διαφορικὴ Γεωμετρία ἔκδ. 1962 σελ. 204.

2. Ἔνθ' ἀνωτ. σελ. 218.

3. Ἔνθ' ἀνωτ. σελ. 214.

Τούτων τεθέντων εὑρίσκονται οἱ γνωστοὶ τύποι τῶν Frenet - Serret (4)

$$(1,4)\quad \frac{d\mathbf{t}}{ds} = \frac{\mathbf{n}}{\rho} \quad (5)$$

$$(1,5)\quad \frac{d\mathbf{n}}{ds} = -\frac{\mathbf{t}}{\rho} + \frac{\mathbf{b}}{\tau}$$

$$(1,6)\quad \frac{d\mathbf{b}}{ds} = -\frac{\mathbf{n}}{\tau}$$

§ 2. Οἱ ἀνωτέρω τύποι (1,4), (1,5), (1,6) ἀπὸ τῆς εὑρέσεώς των ἐγενικεύθησαν συχνάκις καὶ πολυπλεύρως. Οὕτω:

Ὁ καθηγητὴς Ν. Χατζιδάκης εἰς τὴν ἐργασίαν του «Formules de Frenet, courbures et torsions relatives» (6), ἐγενίκευσεν τοὺς τύπους τούτους, θεωρήσας δύο καμπύλας C καὶ C_1 καὶ ἀντιστοίχως ὁρίσας τὴν σχετικὴν καμπυλότητα καὶ σχετικὴν στρέψιν τῆς καμπύλης C ὡς πρὸς τὴν C_1.

Ὁ καθηγητὴς O. Mayer εἰς τὴν ἐργασίαν του «Etude sur les courbes gauches» (7) ἔδωσεν ὁμοίους τύπους πρὸς τοὺς ὑπὸ τοῦ Frenet, θεωρήσας ὡς συνοδεῦον τρίεδρον τῆς καμπύλης, τὸ σχηματιζόμενον ὑπὸ τῆς ἐφαπτομένης, τῆς ἡμιευθείας τῆς συνδεούσης τὸ M μετὰ τοῦ κέντρου τῆς ἐγγυτάτης σφαίρας καὶ τῆς ἡμιευθείας τῆς καθέτου ἐπὶ τὰς δύο προηγουμένας.

Ὁ καθηγητὴς κ. S. Bilinski εἰς ἀνακοίνωσίν του ὑπὸ τὸν τίτλον «Eine Verallgemeinerung der Formeln von Frenet und eine Isomorphie gewisser Teile der Differentialgeometrie der Raumkurven» (8) γενομένην εἰς τὸ ἐν Amsterdam τὸν Σεπτέμβριον τοῦ 1954 συνελθὸν Διεθνὲς Μαθηματικὸν Συνέδριον δίδει μίαν γενίκευσιν τῶν τύπων τοῦ Frenet, θεωρῶν εἰς τὸ τυχὸν

4. Οἱ τύποι οἱ ὁποῖοι δίδουν τὰς παραγώγους τῶν μοναδιαίων διανυσμάτων τῆς ἐφαπτομένης τῆς πρώτης καθέτου καὶ τῆς ὀρθίας καθέτου συναρτήσει τῶν ἀκτίνων καμπυλότητος καὶ στρέψεως καὶ τῶν αὐτῶν μοναδιαίων διανυσμάτων ἐδημοσιεύθησαν τὸ πρῶτον ὑπὸ τοῦ Frenet «Sur les courbes à double courbure» Thèse, Toulouse 1847 καὶ εἰς τὸ Journal de Mathématique XVII (1852) καθὼς ἐπίσης ὑπὸ τοῦ J. A. Serret «Memoire sur quelques formules relatives à la théorie des courbes à doubles courbure» Journal de Mathematique T. XVI (1851)

5. W. Blaschke Differential Geometrie Band I s. 24.

6. Ν. Χατζιδάκη: «Formules de Frenet, courbures et torsions relatives». Δελτίον τῆς Ἑλληνικῆς Μαθηματικῆς Ἑταιρείας, τόμος Α', τεῦχος Β' 1919, σελ. 107.

7. O. Mayer: «Etude sur les courbes gauches». Buletinul Facultatii de Stiinte din Gernauti, vol II fasc 1 (1928) pag. 208.

8. S. Bilinski: Eine verallgemeinerung der Formeln von Frenet und eine Isomorphie gewisser Teile der Differentialgometrie der Raumkurven», Clasnik Matematicko - Fizicki i Astronomski, tom 10, No 3, Zagreb 1955.

σημεῖον M τῆς καμπύλης, ἐκτὸς τοῦ συνοδεύοντος τριέδρου τοῦ Frenet, μίαν ἀκολουθίαν συνοδευόντων τριέδρων καὶ δύο ἀκολουθίας ἀριθμητικῶν συναρτήσεων.

Τέλος ὁ καθηγητὴς Σ. Σαραντόπουλος εἰς τὴν ἀνακοίνωσίν του «Généralisation des formules de Frenet» (9) γενομένην τὴν 22-9-1956 εἰς τὸ ἐν Βιέννῃ συνελθὸν Μαθηματικὸν Συνέδριον δίδει μίαν γενίκευσιν τῶν τύπων τοῦ Frenet, θεωρῶν ἀντὶ τοῦ συνιδεύοντος τριέδρου τοῦ Frenet, ἓν οἱονδήποτε δοθὲν τρισορθογώνιον τρίεδρον συνοδεῦον τὸ σημεῖον M κατὰ τὴν κίνησίν του.

§ 3. Ἡ παροῦσα ἐργασία ἀποτελεῖται ἀπὸ δύο μέρη.

Εἰς τὸ πρῶτον μέρος θεωροῦμεν:

α) Μίαν ἀκολουθίαν συνοδευόντων τρισορθογωνίων δεξιοστρόφων τριέδρων D_i $(i = 0, 1, 2, \ldots)$ ἕκαστον τῶν ὁποίων ὁρίζεται ὑπὸ μιᾶς τριάδος μοναδιαίων διανυσματικῶν συναρτήσεων:

$$\mathbf{t}_i(s), \quad \mathbf{n}_i(s), \quad \mathbf{b}_i(s) \qquad (i = 0, 1, 2, \ldots)$$

β) Τρεῖς ἀκολουθίας ἀριθμητικῶν συναρτήσεων:

$$u_i(s), \quad v_i(s), \quad w_i(s) \qquad (i = 0, 1, 2, \ldots),$$

καὶ καλοῦμεν i^οστὴν^ καμπυλότητα τὴν $u_i(s)$ καὶ i^οστὴν^ στρέψιν τὴν $v_i(s)$.

Τῶν θεωρουμένων i^οστῶν^ κατευθύνσεων $\mathbf{t}_i(s)$, $\mathbf{n}_i(s)$ καὶ $\mathbf{b}_i(s)$ εὑρίσκομεν διὰ τὰς πρώτας αὐτῶν παραγώγους, τύπους ἀναλόγους πρὸς τοὺς τύπους τοῦ Frenet, γενικωτέρους ὅμως ἐκείνων, οἱ ὁποῖοι ἐκφράζουν τὴν πρώτην παράγωγον ἑκάστης τῶν i^οστῶν^ κατευθύνσεων διὰ τῶν δύο ἄλλων καὶ τῶν $u_i(s)$, $v_i(s)$, $w_i(s)$.

Εἰς τὸ δεύτερον μέρος θεωροῦμεν τὰς γενικεύσεις τῶν τύπων τοῦ Frenet τῶν O. Mayer, S. Bilinski καὶ Σ. Σαραντοπούλου ὡς μερικὰς περιπτώσεις τῆς εἰς τὸ πρῶτον μέρος δοθείσης γενικεύσεως τῶν τύπων τοῦ Frenet.

Μέρος πρῶτον

I. Οἱ γενικευμένοι τύποι τῶν Frenet - Serret.

§ 4. Ἔστω καμπύλη C, τοῦ Εὐκλειδίου διανυσματικοῦ χώρου R^3, μὲ διανυσματικὴν ἐξίσωσιν:

$$(4{,}1) \qquad \mathbf{r} = \mathbf{r}(s).$$

9. S. Sarantopoulos: «Généralisation des formules de Frenet», Δελτίο τῆς Ἑλληνικῆς Μαθηματικῆς Ἑταιρείας (Νέα σειρὰ τόμος 7ος τεῦχος 1 σελ. 1 ἕως 15 1966).

α) Εἰς τὸ τυχὸν σημεῖον αὐτῆς M, ὑποθέτομεν, ὅτι ὑφίστανται τρεῖς ἀκολουθίαι διανυσματικῶν συναρτήσεων

$$(4,2)\quad \mathbf{t}(s),\ \mathbf{t}_1(s),\ \mathbf{t}_2(s),\ \ldots,\ \mathbf{t}_i(s),\ \ldots$$

$$(4,3)\quad \mathbf{n}(s),\ \mathbf{n}_1(s),\ \mathbf{n}_2(s),\ \ldots,\ \mathbf{n}_i(s),\ \ldots \qquad (I)$$

$$(4,4)\quad \mathbf{b}(s),\ \mathbf{b}_1(s),\ \mathbf{b}_2(s),\ \ldots,\ \mathbf{b}_i(s),\ \ldots$$

Ἔνθα $\mathbf{t}(s)$, $\mathbf{n}(s)$, $\mathbf{b}(s)$ εἶναι τὰ μοναδιαῖα διανύσματα ἐπὶ τῶν τριῶν ἀρχικῶν διευθύνσεων τῆς ἐφαπτομένης τῆς πρώτης καθέτου καὶ τῆς δευτέρας καθέτου Τὰ διανύσματα $\mathbf{t}_i(s)$, $\mathbf{n}_i(s)$, $\mathbf{b}_i(s)$ $(i=1,2,\ldots)$ λαμβάνονται μοναδιαῖα κάθετα ἐπ' ἄλληλα καὶ σχηματίζοντα κατὰ τὴν σειρὰν $\mathbf{t}_i$, $\mathbf{n}_i$, $\mathbf{b}_i$ δεξιόστροφον σύστημα ἀξόνων. Θὰ ἰσχύουν ἐπομένως οἱ τύποι:

$$(4,5)\quad \mathbf{t}_i^2 = 1,\quad \mathbf{n}_i^2 = 1,\quad \mathbf{b}_i^2 = 1$$

$$(4,6)\quad \mathbf{t}_i\mathbf{n}_i = 0,\quad \mathbf{n}_i\mathbf{b}_i = 0,\quad \mathbf{b}_i\mathbf{t}_i = 0$$

$$(4,7)\quad \mathbf{t}_i = \mathbf{n}_i x \mathbf{b}_i,\quad \mathbf{n}_i = \mathbf{b}_i x \mathbf{t}_i,\quad \mathbf{b}_i = \mathbf{t}_i x \mathbf{n}_i$$ [10]

Τὸ τρίεδρον $D_i = (\mathbf{t}_i,\ \mathbf{n}_i,\ \mathbf{b}_i)$ τὸ καλοῦμεν $i^{\text{οστον}}$ συνοδεῦον τρίεδρον τῆς καμπύλης. Διὰ $i = 0$ ἔχομεν τὸ ἀρχικὸν συνοδεῦον τρίεδρον τῆς καμπύλης καὶ τὸ σημειοῦμεν ἄνευ δεικτῶν. Διὰ $i = 1, 2, \ldots$ θὰ ἔχωμεν τὸ πρῶτον, δεύτερον καὶ οὕτω καθ' ἑξῆς συνοδεῦον τρίεδρον τῆς καμπύλης. Τὰ τρίεδρα D_i $(i = 1, 2, \ldots)$ θὰ εἶναι τελείως καθορισμένα ἐὰν δωθοῦν αἱ σχέσεις:

$$(4,8)\quad \mathbf{t}_i = t_{i1}(s)\,\mathbf{t}_{i-1} + t_{i2}(s)\,\mathbf{n}_{i-1} + t_{i3}(s)\,\mathbf{b}_{i-1}$$

$$(4,9)\quad \mathbf{n}_i = n_{i1}(s)\,\mathbf{t}_{i-1} + n_{i2}(s)\,\mathbf{n}_{i-1} + n_{i3}(s)\,\mathbf{b}_{i-1}$$

$$(4,10)\quad \mathbf{b}_i = b_{i1}(s)\,\mathbf{t}_{i-1} + b_{i2}(s)\,\mathbf{n}_{i-1} + b_{i3}(s)\,\mathbf{b}_{i-1}$$

Ἔνθα $t_{ik}(s)$, $n_{ik}(s)$, $b_{ik}(s)$ $(i = 1, 2, \ldots$ καὶ $k = 1, 2, 3)$, δοθεῖσαι ἢ προσδιοριστέαι, ὡς θὰ εἴδωμεν κατωτέρω, συνεχεῖς συναρτήσεις τοῦ τόξου s τῆς καμπύλης C.

β) Ὑποθέτομεν προσέτι, ὅτι ὑπάρχουν τρεῖς ἀκολουθίαι ἀριθμητικῶν συναρτήσεων:

$$(4,11)\quad u(s)\ \ u_1(s)\ \ u_2(s),\ \ldots,\ u_i(s),\ \ldots$$

$$(4,12)\quad v(s),\ v_1(s),\ v_2(s),\ \ldots,\ v_i(s),\ \ldots \qquad (II)$$

$$(4,13)\quad w(s),\ w_1(s),\ w_2(s),\ \ldots,\ w_i(s),\ \ldots$$

Ἔνθα αἱ συναρτήσεις $u(s) = \dfrac{1}{\rho}$, $v(s) = \dfrac{1}{\tau}$ παριστοῦν τὴν καμπυ-

10. J. Spielrein: Vektorrechnung s. 26

λότητα καὶ τὴν στρέψιν τῆς καμπύλης C εἰς τὸ θεωρούμενον σημεῖον M καὶ $w(s) = 0$.

Αἱ συναρτήσεις $u_i(s)$ καὶ $v_i(s)$ θὰ καλοῦνται ἀντιστοίχως $i^{\sigma\tau\eta}$ καμπυλότης καὶ $i^{\sigma\tau\eta}$ στρέψις τῆς καμπύλης καὶ μετὰ τῆς $w_i(s)$ θὰ ὁρισθοῦν κατωτέρω.

§ 5. Διὰ τὰ μοναδιαῖα διανύσματα $\mathbf{t}_i(s)$, $\mathbf{n}_i(s)$, $\mathbf{b}_i(s)$ δυνάμεθα νὰ θέσωμεν τὰς ἑπομένας σχέσεις μεταξὺ τῶν προσδιοριστέων συντελεστῶν x_{ij} ($i = 1, 2, 3$ $j = 1, 2, 3$).

$$(5,1) \qquad \frac{d\mathbf{t}_i}{ds} = x_{11}\mathbf{t}_i + x_{12}\mathbf{n}_i + x_{13}\,\mathbf{b}_i$$

$$(5,2) \qquad \frac{d\mathbf{n}_i}{ds} = x_{21}\mathbf{t}_i + x_{22}\mathbf{n}_i + x_{23}\,\mathbf{b}_i$$

$$(5,3) \qquad \frac{d\mathbf{b}_i}{ds} = x_{31}\mathbf{t}_i + x_{32}\mathbf{n}_i + x_{33}\mathbf{b}_i$$

Ἐκ τῶν (4,5) διὰ παραγωγίσεως λαμβάνομεν:

$$(5,4) \qquad \frac{d\mathbf{t}_i}{ds}\,\mathbf{t}_i = 0, \qquad \frac{d\mathbf{n}_i}{ds}\,\mathbf{n}_i = 0, \qquad \frac{d\mathbf{b}_i}{ds}\,\mathbf{b}_i = 0.$$

Ἐκ τῶν (5,1), (5,2), (5,3) πολλαπλασιάζοντες ἐσωτερικῶς ἀντιστοίχως ἐπὶ $\mathbf{t}_i$, $\mathbf{n}_i$, $\mathbf{b}_i$ λαμβάνομεν:

$$(5,5) \qquad \frac{d\mathbf{t}_i}{ds}\,\mathbf{t}_i = x_{11}, \qquad \frac{d\mathbf{n}_i}{ds}\,\mathbf{n}_i = x_{22}, \qquad \frac{d\mathbf{b}_i}{ds}\,\mathbf{b}_i = x_{33}$$

Συγκρίνοντες τοὺς (5,4) καὶ (5,5) λαμβάνομεν:

$$(5,6) \qquad x_{11} = 0, \qquad x_{22} = 0, \qquad x_{33} = 0$$

Ἐκ τῆς $\mathbf{t}_i\,\mathbf{n}_i = 0$ διὰ παραγωγίσεως λαμβάνομεν:

$$(5,7) \qquad \frac{d\mathbf{t}_i}{ds}\,\mathbf{n}_i + \mathbf{t}_i\,\frac{d\mathbf{n}_i}{ds} = 0$$

Πολλαπλασιάζοντες ἐσωτερικῶς ἀμφότερα τὰ μέλη τῆς (5,1) ἐπὶ $\mathbf{n}_i$ καὶ τῆς (5,2) ἐπὶ $\mathbf{t}_i$ λαμβάνομεν:

$$(5,8) \qquad \frac{d\mathbf{t}_i}{ds}\,\mathbf{n}_i = x_{12}, \qquad \mathbf{t}_i\,\frac{d\mathbf{n}_i}{ds} = x_{21}$$

Συγκρίνοντες τοὺς (5,7) καὶ (5,8) εὑρίσκομεν:

$$(5,9)\qquad x_{12} + x_{21} = 0$$

Ὁμοίως εὑρίσκομεν:

$$(5,10)\qquad x_{23} + x_{32} = 0 \quad \text{καὶ} \quad x_{31} + x_{13} = 0$$

Οὕτω οἱ τύποι (5,1), (5,2) καὶ (5,3) γίνονται:

$$(5,11)\qquad \frac{d\mathbf{t}_i}{ds} = x_{12}\mathbf{n}_i - x_{31}\mathbf{b}_i$$

$$(5,12)\qquad \frac{d\mathbf{n}_i}{ds} = - x_{12}\mathbf{t}_i + x_{23}\mathbf{b}_i$$

$$(5,13)\qquad \frac{d\mathbf{b}_i}{ds} = x_{31}\mathbf{t}_i - x_{23}\mathbf{n}_i$$

Ἐὰν προσέτι θέσωμεν $x_{12} = u_i(s)$, $x_{23} = v_i(s)$ καὶ $x_{31} = w_i(s)$ δηλαδὴ ἐὰν θέσωμεν:

$$(5,14)\qquad u_i(s) = \frac{d\mathbf{t}_i}{ds}\,\mathbf{n}_i = -\,\mathbf{t}_i\,\frac{d\mathbf{n}_i}{ds}$$

$$(5,15)\qquad v_i(s) = \frac{d\mathbf{n}_i}{ds}\,\mathbf{b}_i = -\,\mathbf{n}_i\,\frac{d\mathbf{b}_i}{ds}$$

$$(5,16)\qquad w_i(s) = \frac{d\mathbf{b}_i}{ds}\,\mathbf{t}_i = -\,\mathbf{b}_i\,\frac{d\mathbf{t}_i}{ds}$$

Οἱ τύποι (5,11), (5,12) καὶ (5,13) γίνονται:

$$(5,17)\qquad \frac{d\mathbf{t}_i}{ds} = u_i(s)\mathbf{n}_i - w_i(s)\mathbf{b}_i$$

$$(5,18)\qquad \frac{d\mathbf{n}_i}{ds} = - u_i(s)\,\mathbf{t}_i + v_i(s)\mathbf{b}_i \qquad \textbf{(III)}$$

$$(5,19)\qquad \frac{d\mathbf{b}_i}{ds} = w_i(s)\,\mathbf{t}_i - v_i(s)\mathbf{n}_i$$

Οἱ τύποι (III) θὰ καλοῦνται εἰς τὸ ἑξῆς γ ε ν ι κ ε υ μ έ ν ο ι τ ύ π ο ι τ ῶ ν F r e n e t - S e r e e t καὶ θὰ εἶναι τελείως καθορισμένοι ὅταν ὁρισθοῦν αἱ ἀκολουθίαι:

(4,2) (4,3) (4,4) καὶ (4,11), (4,12), (4,13).

Ἐὰν θέσωμεν $w_i(s) = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots)$ διὰ πᾶσαν τιμὴν τοῦ τόξου s, οἱ τύποι (III) γίνονται

$$(5,20) \qquad \frac{d\mathbf{t}_i}{ds} = u_i(s)\mathbf{n}_i$$

$$(5,21) \qquad \frac{d\mathbf{n}_i}{ds} = -\, u_i(s)\,\mathbf{t}_i + v_i(s)\mathbf{b}_i \qquad \text{(IV)}$$

$$(5,22) \qquad \frac{d\mathbf{b}_i}{ds} = -\, v_i(s)\mathbf{n}_i$$

Οἱ τύποι οὗτοι εἶναι τελείως ἀνάλογοι τῶν τύπων τῶν Frenet - Sereet καὶ ἕνεκα τούτου καλέσαμε τὴν συνάρτησιν $u_i(s)$ $i^{\text{οστην}}$ καμπυλότητα καὶ τὴν συνάρτησιν $u_i(s)$ $i^{\text{οστην}}$ στρέψιν τῆς καμπύλης C εἰς τὸ θεωρούμενον σημεῖον M.

II. Καθορισμὸς τῶν ἀκολουθιῶν (I) καὶ (II).

§ 6 Ὡς εἴδωμεν, μεταξὺ τῶν διανυσματικῶν συναρτήσεων $\mathbf{t}_i(s)$, $\mathbf{n}_i(s)$, $\mathbf{b}_i(s)$ ὑφίστανται αἱ σχέσεις (4,5), (4,6) καὶ (4,7) καὶ μεταξὺ τῶν ἀριθμητικῶν συναρτήσεων $u_i(s)$, $v_i(s)$, $w_i(s)$ αἱ σχέσεις (5,14), (5,15) καὶ (5,16). Ἐπομένως:

α) Ἐὰν δωθοῦν δύο ἐκ τῶν $\mathbf{t}_i$, $\mathbf{n}_i$, $\mathbf{b}_i$ διὰ τῶν συντεταγμένων προβολῶν των ἐπὶ τοῦ τριέδρου D_{i-1} ἐκ τῆς καταλλήλου ἐκ τῶν (4,7) θὰ ὁρισθῇ τὸ ἕτερον καὶ ἐκ τῶν (5,14), (5,15) καὶ (5,16) θὰ ὁρισθοῦν αἱ u_i, v_i, w_i συνεπῶς αἱ ἀκολουθίαι (I) καὶ (II).

β) Ἐάν, ὡς ἤδη ἐλέχθη, τεθῇ $w_i = 0$ τότε ὑπάρχει μία σχέσις μεταξὺ τῶν $\mathbf{t}_i$, $\mathbf{n}_i$, $\mathbf{b}_i$, ἑπομένως ἀρκεῖ νὰ δωθοῦν αἱ συντεταγμέναι προβολαὶ τοῦ ἑνὸς τούτων ὡς πρὸς τὸ D_{i-1} ἵνα προσδιορισθοῦν αἱ συντεταγμέναι προβολαὶ τῶν δύο ἄλλων καὶ συνεπῶς νὰ ὁρισθοῦν αἱ ἀκολουθίαι (I) καὶ (II). Θὰ ἐξετάσωμεν ἤδη τὰς τρεῖς περιπτώσεις κατὰ τὰς ὁποίας εἶναι $w_i = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots)$ καὶ δίδεται τὸ $\mathbf{t}_i$ ἢ $\mathbf{n}_i$ ἢ τέλος τὸ $\mathbf{b}_i$.

§ 7 Δ ί δ ο ν τ α ι $w_i = 0$ καὶ $\mathbf{t}_i = t_{i1}\mathbf{t}_{i-1} + t_{i2}\,\mathbf{n}_{i-1} + t_{i3}\,\mathbf{b}_{i-1}$

Ἐκ τῆς (5,16) ἐπειδὴ $w_i = 0$ λαμβάνομεν:

$$\frac{d\mathbf{b}_i}{ds}\,\mathbf{t}_i = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{d(\mathbf{t}_i x \mathbf{n}_i)}{ds}\,\mathbf{t}_i = 0 \quad \rightarrow \quad (\dot{\mathbf{t}}_i, \mathbf{n}_i, \mathbf{t}_i) + (\mathbf{t}_i, \dot{\mathbf{n}}_i, \mathbf{t}_i) = 0$$

και ἐπειδὴ $(\mathbf{t}_i, \dot{\mathbf{n}}_i, \mathbf{t}_i) = 0$ [11] ἕπεται, ὅτι:

$$(\dot{\mathbf{t}}_i, \mathbf{n}_i, \mathbf{t}_i) = 0$$

Ἑπομένως τὰ διανύσματα $\mathbf{n}_i$, $\mathbf{t}_i$, $\dot{\mathbf{t}}_i$ εἶναι συνεπίπεδα καὶ ἐπειδὴ τὰ $\mathbf{n}_i$ καὶ $\dot{\mathbf{t}}_i$ εἶναι κάθετα ἐπὶ τὸ $\mathbf{t}_i$ θὰ εἶναι συγγραμμικά, ἄρα:

$$\mathbf{n}_i = \frac{\dot{\mathbf{t}}_i}{|\dot{\mathbf{t}}_i|} \quad \text{καὶ} \quad \mathbf{b}_i = \mathbf{t}_i \mathrm{x} \frac{\dot{\mathbf{t}}_i}{|\dot{\mathbf{t}}_i|}$$

Ἐκ τῆς (5,14) λαμβάνομεν:

$$u_i = \frac{d\mathbf{t}_i}{ds}\, \mathbf{n}_i = \dot{\mathbf{t}}_i\, \frac{\dot{\mathbf{t}}_i}{|\dot{\mathbf{t}}_i|}$$

Ἐπίσης, ἐκ τῆς (5,15) λαμβάνομεν:

$$v_i = \frac{d\mathbf{n}_i}{ds}\, \mathbf{b}_i = \dot{\mathbf{n}}_i\, (\mathbf{t}_i \mathrm{\,x\,} \mathbf{n}_i) = (\dot{\mathbf{n}}_i, \mathbf{t}_i, \mathbf{n}_i) = \frac{(\mathbf{t}_i, \dot{\mathbf{t}}_i, \ddot{\mathbf{t}}_i)}{|\dot{\mathbf{t}}_i|^2}$$

Οὕτω, δοθείσης τῆς διανυσματικῆς ἐξισώσεως (4,1) μιᾶς καμπύλης καὶ τῶν συντεταγμένων προβολῶν t_{i1}, t_{i2}, t_{i3} τοῦ $\mathbf{t}_i$ ἐπὶ τοῦ τριέδρου D_{i-1} διὰ $i = 1, 2, \ldots$ προσδιορίζονται πλήρως αἱ ἀκολουθίαι (I) τῶν τριέδρων D_i καθῶς καὶ αἱ (II) τῶν καμπυλοτήτων u_i καὶ στρέψεων v_i.

§ 8 Δίδονται $w_i = 0$ καὶ $\mathbf{n}_i = n_{i1}\, \mathbf{t}_{i-1} + n_{i2}\, \mathbf{n}_{i-1} + n_{i3}\, \mathbf{b}_{i-1}$

Θέτομεν:

$$(8,1) \qquad \mathbf{t}_i = t_{i1}\, \mathbf{t}_{i-1} + t_{i2}\, \mathbf{n}_{i-1} + t_{i3}\, \mathbf{b}_{i-1}$$

καὶ προσδιορίζομεν τὰς συναρτήσεις $t_{i1}(s)$, $t_{i2}(s)$, $t_{i3}(s)$ ἐκ τῶν σχέσεων:

$$w_i = \mathbf{b}_i\, \mathbf{t}_i = 0,\ \mathbf{t}^2{}_i = 1,\ \mathbf{t}_i\, \mathbf{n}_i = 0,\ \mathbf{b}_i = \mathbf{t}_i \mathrm{\,x\,} \mathbf{n}_i$$

Οὕτω ἐκ τῆς $\dfrac{d\mathbf{b}_i}{ds} \cdot \mathbf{t}_i = 0$

ὡς εἴδωμεν, λαμβάνομεν:

$$(8,2) \qquad (\dot{\mathbf{t}}_i, \mathbf{t}_i, \mathbf{n}_i) = 0$$

Εἶναι ὅμως

$$\dot{\mathbf{t}}_i = (\dot{t}_{i1} - t_{i2}u_{i-1})\, \mathbf{t}_{i-1} + (t_{i1}u_{i-1} + \dot{t}_{i2} - t_{i3}\, u_{i-1})\, \mathbf{n}_{i-1} + (t_{i2}v_{i-1} + \dot{t}_{i3})\mathbf{b}_{i-1}$$

---

11. J. Spielrein: Vektorrechnung s. 27.

Ἑπομένως ἡ (8,2) γράφεται καὶ οὕτω:

$$\begin{vmatrix} \dot{t}_{i1} - t_{i2}u_{i-1} & t_{i1}u_{i-1} + \dot{t}_{i2} - t_{i3}v_{i-1} & t_{i2}v_{i-1} + \dot{t}_{i3} \\ t_{i1} & t_{i2} & t_{i3} \\ n_{i1} & n_{i2} & n_{i3} \end{vmatrix} = 0$$

Ἐκ ταύτης λαμβάνομεν:

$$(t_{i2}n_{i3} - t_{i3}n_{i2})\dot{t}_{i1} + (t_{i3}n_{i1} - t_{i1}n_{i3})\dot{t}_{i2} + (t_{i1}n_{i2} - t_{i2}n_{i1})\dot{t}_{i3} = (n_{i3}u_{i-1} + n_{i1}v_{i-1})$$

Ἐκ τῶν $\mathbf{t}_i^2 = 1$ καὶ $\mathbf{t}_i\mathbf{n}_i = 0$ μετὰ παραγώγησιν λαμβάνομεν:

$$t_{i1}\dot{t}_{i1} + t_{i1}\dot{t}_{i2} + t_{i3}\dot{t}_{i3} = 0 \tag{8,4}$$

$$n_{i1}\dot{t}_{i1} + n_{i2}\dot{t}_{i2} + n_{i3}\dot{t}_{i3} = -(t_{i1}\dot{n}_{i1} + t_{i2}\dot{n}_{i2} + t_{i3}\dot{n}_{i3}). \tag{8,5}$$

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω ἐξισώσεων (8,3) (8,4), (8,5) προκύπτει, ὅτι αἱ ζητούμεναι συναρτήσεις $t_{i1}(s)$, $t_{i2}(s)$, $t_{i3}(s)$ ἐπαληθεύουν τὰ ὁμογενὲς γραμμικὸν σύστημα τῶν διαφορικῶν ἐξισώσεων.

$$\begin{aligned} \dot{t}_{i1} &= (-n_{i1}\dot{n}_{i1})\,t_{i1} + (kn_{i3} - n_{i1}\dot{n}_{i2})\,t_{i2} + (-kn_{i2} - n_{i1}\dot{n}_{i3})\,t_{i3} \\ \dot{t}_{i2} &= (-kn_{i3} - n_{i2}\dot{n}_{i1})\,t_{i1} + (-n_{i2}\dot{n}_{i2})\,t_{i2} + (kn_{i1} - n_{i2}\dot{n}_{i3})\,t_{i3} \\ \dot{t}_{i3} &= (kn_{i2} - n_{i3}\dot{n}_{i1})\,t_{i1} + (-kn_{i1} - n_{i3}\dot{n}_{i2})\,t_{i2} + (-n_{i3}\dot{n}_{i3})\,t_{i3} \end{aligned} \tag{8,6}$$

(Ἔνθα $k = n_{i3}u_{i-1} + n_{i1}v_{i-1}$).

Ἐὰν ὑποθέσωμεν, ὅτι αἱ n_{i1}, n_{i2}, n_{i3} εἶναι σταθεραί, τὸ ἀνωτέρω σύστημα (8,6) γίνεται:

$$\begin{aligned} \dot{t}_{i1} &= 0 + kn_{i3}t_{i2} - kn_{i2}t_{i3} \\ \dot{t}_{i2} &= -kn_{i3}\,t_{i1} + 0 + kn_{i1}\,t_{i3} \\ \dot{t}_{i3} &= kn_{i2}t_{i1} - kn_{i1}t_{i2} + 0 \end{aligned} \tag{8,7}$$

Τὸ σύστημα (8,7) εἶναι συναφὲς ἐν ἑαυτῷ καὶ ἡ λύσις του, ὡς γνωστόν, ἀνάγεται εἰς τὴν λύσιν μιᾶς διαφορικῆς ἐξισώσεως τοῦ Riccati (12). Προσδιορισθεισῶν τῶν συνηρτήσεων t_{i1}, t_{i2}, t_{i3} προσδιορίζεται τὸ διάνυσμα $\mathbf{t}_i$ καὶ ἐκ τῆς σχέσεως $\mathbf{b}_i = \mathbf{t}_i \times \mathbf{n}_i$ προσδιορίζεται τὸ $\mathbf{b}_i$, ἑπομένως θὰ ἔχωμεν τὰς ἀκολουθίας (I), ὡς δὲ εἴδωμεν ἀνωτέρω (§ 7) θὰ εἶναι:

$$u_i = |\dot{\mathbf{t}}_i|$$

$$v_i = \frac{(\mathbf{t}_i,\ \dot{\mathbf{t}}_i,\ \ddot{\mathbf{t}}_i)}{|\dot{\mathbf{t}}|^2}$$

12. E. Coursat: Cours d'Analyse Mathématique, Tome II, Septième édition, p. 521.

§ 9 Δίδονται $w_i = 0$ καὶ $\mathbf{b}_i = b_{i1}\mathbf{t}_{i-1} + b_{i2}\mathbf{n}_{i-1} + b_{i3}\mathbf{b}_{i-1}$

Ἐκ τῆς (5,16) ἐπειδὴ $w_i = 0$ λαμβάνομεν:

$$\frac{d\mathbf{b}_i}{ds}\,\mathbf{t}_i = 0 \rightarrow \dot{\mathbf{b}}_i(\mathbf{n}_i \times \mathbf{b}_i) = 0 \rightarrow (\mathbf{n}_i, \mathbf{b}_i, \dot{\mathbf{b}}_i) = 0$$

Ἑπομένως τὰ $\mathbf{n}_i$, $\mathbf{b}_i$, $\dot{\mathbf{b}}_i$ εἶναι συνεπίπεδα καὶ ἐπειδὴ τὰ $\mathbf{n}_i$ καὶ $\dot{\mathbf{b}}_i$ εἶναι κάθετα ἐπὶ τὸ $\mathbf{b}_i$ ἕπεται, ὅτι θὰ εἶναι συγγραμμικά, ἄρα:

$$\mathbf{n}_i = \frac{\dot{\mathbf{b}}_i}{|\dot{\mathbf{b}}_i|} \quad \text{καὶ} \quad \mathbf{t}_i = \mathbf{n}_i \times \mathbf{b}_i = \frac{\dot{\mathbf{b}}_i}{|\dot{\mathbf{b}}_i|} \times \mathbf{b}_i$$

Ἐκ τῆς (5,14) λαμβάνομεν:

$$u_i = \dot{\mathbf{t}}_i\,\mathbf{n}_i = \left(\frac{\dot{\mathbf{b}}_i}{|\dot{\mathbf{b}}_i|} \times \mathbf{b}_i\right)^{\cdot} \frac{\dot{\mathbf{b}}_i}{|\dot{\mathbf{b}}_i|} = \frac{(\mathbf{b}_i, \dot{\mathbf{b}}_i, \ddot{\mathbf{b}}_i)}{|\dot{\mathbf{b}}_i|^2}$$

Ἐκ τῆς (5,15) λαμβάνομεν:

$$v_i = \dot{\mathbf{n}}\mathbf{b}_i = \left(\frac{\dot{\mathbf{b}}_i}{|\dot{\mathbf{b}}_i|}\right)^{\cdot} \mathbf{b}_i = \frac{\mathbf{b}_i\,\ddot{\mathbf{b}}_i}{|\dot{\mathbf{b}}_i|}$$

Μέρος δεύτερον

Μερικαὶ περιπτώσεις

§ 10. Γενίκευσις τῶν τύπων τοῦ Frenet ὑπὸ Mayer.

Περιοριζόμεθα εἰς τὰ τρίεδρα D καὶ D_1 καὶ θεωροῦμεν ὡς D_1 τὸ ὁριζόμενον ἐκ τῶν σχέσεων:

α) $\mathbf{t}_1 = \mathbf{t}$

β) $\mathbf{b}_1 =$ μοναδιαῖον διάνυσμα κείμενον ἐπὶ τῆς εὐθείας τῆς συνδεούσης τὸ M μὲ τὸ κέντρον τῆς ἐγγυτάτης σφαίρας καὶ μὲ θετικὴν φορὰν ἐκ τοῦ M πρὸς τὸ κέντρον τῆς σφαίρας ταύτης.

γ) $\mathbf{n}_1 = \mathbf{b}_1 \times \mathbf{t}_1$.

Τὰ διανύσματα $\mathbf{n}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{n}_1$, $\mathbf{b}_1$ εἶναι κάθετα ἐπὶ τὸ $\mathbf{t}$ καὶ ἑπομένως κεῖνται ἐπὶ τοῦ καθέτου ἐπιπέδου τῆς καμπύλης C εἰς τὸ θεωρούμενον σημεῖον M. Ἐὰν K_k καὶ K_σ εἶναι ἀντιστοίχως τὰ κέντρα τοῦ ἐγγυτάτου κύκλου καὶ ἐγγυτάτης σφαίρας, ὡς γνωστόν, εἶναι:

$$\mathbf{MK}_\sigma = \rho\mathbf{n} + (\dot{\rho\tau})\mathbf{b} \quad (^{13})$$

13. W. Blaschschke: Differentialgeometrie I. s. 33.

Ἑπομένως

$$b_1 = \frac{\mathbf{MK}_\sigma}{|\mathbf{MK}_\sigma|} = \frac{\rho}{R}\,\mathbf{n} + \frac{\dot{\rho}\tau}{R}\,\mathbf{b}$$

ἔνθα $\quad R = \sqrt{\rho^2 + (\dot{\rho}\tau)^2}$

Ἐκ τῆς $\mathbf{n}_1 = \mathbf{b}_1 \times \mathbf{t}_1$ ἐπειδὴ εἶναι $\mathbf{t}_1 = \mathbf{t}$ λαμβάνομεν:

$$\mathbf{n}_1 = \left[\frac{\rho}{R}\,\mathbf{n} + \frac{\dot{\rho}\tau}{R}\,\mathbf{b}\right] \times \mathbf{t} = \frac{\dot{\rho}\tau}{R}\,\mathbf{n} - \frac{\rho}{R}\,\mathbf{b}$$

Οὕτω ἔχομεν:

$$\mathbf{t}_1 = \mathbf{t}$$

$$\mathbf{n}_1 = \frac{\dot{\rho}\tau}{R}\,\mathbf{n} - \frac{\rho}{R}\,\mathbf{b}$$

$$\mathbf{b}_1 = \frac{\rho}{R}\,\mathbf{n} + \frac{\dot{\rho}\tau}{R}\,\mathbf{b}$$

Ἐκ τῶν τύπων (5,14), (5,15), (5,16) λαμβάνομεν:

$$u_1 = \dot{\mathbf{t}}_1\mathbf{n}_1 = \frac{\mathbf{n}}{\rho}\left(\frac{\dot{\rho}\tau}{R}\,\mathbf{n} - \frac{\rho}{R}\,\mathbf{b}\right) = \frac{\dot{\rho}\tau}{\rho R}$$

$$v_1 = \dot{\mathbf{n}}_1\mathbf{b}_1 = \left(\frac{\dot{\rho}\tau}{R}\,\mathbf{n} - \frac{\rho}{R}\,\mathbf{b}\right)^{\cdot}\left(\frac{\rho}{R}\,\mathbf{n} + \frac{\dot{\rho}\tau}{R}\,\mathbf{b}\right) = \frac{\dot{R}\rho}{R\dot{\rho}\tau}$$

$$w_1 = \dot{\mathbf{b}}_1\mathbf{t}_1 = -\,\dot{\mathbf{t}}_1\mathbf{b}_1 = -\,\frac{\mathbf{n}}{\rho}\left(\frac{\rho}{R}\,\mathbf{n} + \frac{\dot{\rho}\tau}{R}\,\mathbf{b}\right) = -\,\frac{1}{R}$$

Ἐὰν θέσωμεν:

$$u_1 = \frac{\dot{\rho}\tau}{\rho R} = \frac{1}{P}\,, \qquad v_1 = \frac{\dot{R}\rho}{\rho R\tau} = \frac{1}{T}\,, \qquad w_1 = -\frac{1}{R}$$

οἱ γενικευμένοι τύποι τοῦ Frenet (III) λαμβάνουν τὴν μορφήν:

$$\frac{d\mathbf{t}_1}{ds} = \frac{\mathbf{n}_1}{P} - \frac{\mathbf{b}_1}{R}$$

$$\frac{d\mathbf{n}_1}{ds} = -\frac{\mathbf{t}_1}{P} + \frac{\mathbf{b}_1}{T}$$

$$\frac{d\mathbf{b}_1}{ds} = \frac{\mathbf{t}_1}{R} - \frac{\mathbf{n}_1}{T}$$

Οἱ τύποι οὗτοι εἶναι οἱ ὑπὸ τοῦ Mayer γενικευθέντες τύποι τοῦ Frenet(14).

§ 11. Γενίκευσις τῶν τύπων τοῦ Frenet ὑπὸ Σ. Σαραντοπούλου

Ἐὰν περιορισθῶμεν εἰς τὰ τρίεδρα D καὶ D_1 καὶ θεωρήσωμεν ὡς D_1 τὸ ὁριζόμενον ἐκ τῶν σχέσεων :

$$\mathbf{t}_1 = t_1\mathbf{t} + t_2\mathbf{n} + t_3\mathbf{b}$$

$$\mathbf{n}_1 = n_1\mathbf{t} + n_2\mathbf{n} + n_3\mathbf{b}$$

$$\mathbf{b}_1 = b_1\mathbf{t} + b_2\mathbf{n} + b_3\mathbf{b}$$

καὶ καλέσωμεν

$$\alpha)\ \mathbf{t}_1 = \mathbf{A}, \quad n_1 = \mathbf{\Xi}, \ b_1 = \mathbf{\Lambda}$$

$$\beta)\ \frac{d\mathbf{t}_1}{ds} = \frac{\mathbf{m}_1}{P}, \quad \frac{d\mathbf{n}_1}{ds} = \frac{\mathbf{m}_2}{W}, \quad \frac{d\mathbf{b}_1}{ds} = \frac{\mathbf{m}_3}{\mathbf{T}}$$

εὑρίσκομεν:

$$u_1 = \frac{d\mathbf{t}_1}{ds}\,\mathbf{n}_1 = \frac{\mathbf{m}_1}{P}\,\mathbf{\Xi} = \frac{(\mathbf{\Xi}\,\mathbf{m}_1)}{P}$$

$$v_1 = \frac{d\mathbf{n}_1}{ds}\,\mathbf{b}_1 = -\,\mathbf{n}_1\frac{d\mathbf{b}_1}{ds} = -\,\mathbf{\Xi}\,\frac{\mathbf{m}_3}{T} = -\frac{(\mathbf{\Xi}\mathbf{m}_3)}{T}$$

$$w_1 = \frac{d\mathbf{b}_1}{ds}\,\mathbf{t}_1 = \frac{\mathbf{m}_3}{T}\,\mathbf{A} = \frac{(\mathbf{A}\mathbf{m}_3)}{T}$$

---

14. Δελτίον τῆς Ἑλληνικῆς Μαθηματικῆς Ἑταιρείας τόμος ΚΕ σελ. 82 1950.

Οὕτω οἱ τύποι (III) γίνονται:

$$\frac{dA}{ds} = \frac{(\Xi m_1)}{P}\,\Xi - \frac{(Am_3)}{T}\,\Lambda$$

$$\frac{d\Xi}{ds} = -\frac{(\Xi m_3)}{T}\,\Lambda - \frac{(\Xi m_1)}{P}\,A$$

$$\frac{d\Lambda}{ds} = \frac{(Am_3)}{T}\,A + \frac{(\Xi m_3)}{T}\,\Xi$$

Οἱ τύποι οὗτοι εἶναι οἱ ὑπὸ τοῦ καθηγητοῦ Σ. Σαραντοπούλου γενικευθέντες τύποι τοῦ Frenet ([15]).

§ 12. Γενίκευσις τῶν τύπων τοῦ Frenet ὑπὸ S. Bilinski.

Ὁ καθηγητὴς S. Bilinski ἐθεώρησε:

α) τὰς ἀκολουθίας τῶν ἀριθμητικῶν συναρτήσεων:

$u, u_1, u_2, \ldots$

$v, v_1, v_2, \ldots$

ἔνθα u καὶ v παριστοῦν ἀντιστοίχως τὴν καμπυλότητα καὶ τὴν στρέψιν τῆς καμπύλης C εἰς τὸ θεωρούμενον σημεῖον M καὶ

$$u_i = \sqrt{u^2_{i-1} + v^2_{i-1}} \qquad v_i = \frac{u_{i-1}\,\dot{v}_{i-1} - \dot{u}_{i-1}\,v_{i-1}}{u^2_{i-1} + v^2_{i-1}}$$

β) τὴν ἀκολουθίαν τῶν συνοδευόντων τριέδρων D $(\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b})$, D_1 $(\mathbf{t}_1, \mathbf{n}_1, \mathbf{b}_1)$, D_2 $(\mathbf{t}_2, \mathbf{n}_2, \mathbf{b}_2)$, ... ἔνθα D $(\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b})$ τὸ συνοδεῦον τρίεδρον τοῦ Frenet καὶ $D_i\,(\mathbf{t}_i, \mathbf{n}_i, \mathbf{b}_i)$ $(i = 1, 2, \ldots)$ ὁριζόμενα ὡς ἀκολούθως:

$$\mathbf{t}_i = \mathbf{n}_{i-1}, \quad \mathbf{n}_i = \mathbf{b}_i \times \mathbf{t}_i, \quad \mathbf{b}_i = \frac{u_{i-1}}{u_i}\,\mathbf{t}_{i-1} + \frac{u_{i-1}}{u_i}\,\mathbf{b}_{i-1}$$

15. Δελτίον τῆς Ἑλληνικῆς Μαθηματικῆς Ἑταιρείας, Νεοτ. σειρὰ τόμος 7 τεῦχος 1 σελ. 1 ἕως 15).

καὶ ἀπέδειξεν τοὺς κάτωθι τύπους: (16)

$$\frac{d\mathfrak{t}_i}{ds} = u_i \mathfrak{n}_i$$

$$\frac{d\mathfrak{n}_i}{ds} = - u_i \mathfrak{t}_i + v_i \mathfrak{b}_i$$

$$\frac{d\mathfrak{b}_i}{ds} = - v_i \mathfrak{n}_i$$

Οἱ τύποι οὗτοι εἶναι οἱ (IV) τῆς § 5.

Τὰς ἀκολουθίας τῶν συναρτήσεων:

$$u,\ u_1,\ u_2,\ \ldots$$

$$v,\ v_1,\ v_2,\ \ldots$$

καθὼς καὶ τὴν ἀκολουθίαν τῶν τριέδρων

$$D,\ D_1,\ D_2,\ \ldots$$

δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν, ὡς μερικὴ περίπτωσιν τῆς § 7.

Πράγματι, ὡς εἴδωμεν εἰς τὴν § 7, θὰ εἶναι:

$$\mathfrak{n}_i = \frac{\dot{\mathfrak{t}}_i}{|\dot{\mathfrak{t}}_i|}, \qquad \mathfrak{b}_i = \mathfrak{t}_i \times \mathfrak{n}_i, \quad u_i = |\dot{\mathfrak{t}}_i|, \quad v_i = \frac{(\mathfrak{t}_i,\ \dot{\mathfrak{t}}_i,\ \ddot{\mathfrak{t}}_i)}{|\dot{\mathfrak{t}}_i|^2}$$

Ἐκ τῆς $\mathfrak{t}_i = \mathfrak{n}_{i-1}$ διὰ παραγωγίσεως λαμβάνομεν:

$$\dot{\mathfrak{t}}_i = \dot{\mathfrak{n}}_{i-1} = - u_{i-1}\, \mathfrak{t}_{i-1} + v_{i-1}\, \mathfrak{b}_{i-1}$$

$$\ddot{\mathfrak{t}}_i = - \dot{u}_{i-1}\, \mathfrak{t}_{i-1} - (u^2_{i-1} + v^2_{i-1})\, \mathfrak{n}_{i-1} + \dot{v}_{i-1}\, \mathfrak{b}_{i-1}$$

$$|\dot{\mathfrak{t}}_i| = \sqrt{u^2_{i-1} + v^2_{i-1}} = u_i$$

---

16. S. Bilinski: Eine verallgemeinerung der Formeln nov Frenet und eine Isomorphie gewisser Teile der Differentialgeometrie der Raumkurven» Clasnik Matematicko - Fizicki i Astronomski, tom 10, No 3, Zagreb 1955 P. 175.

Ἑπομένως θὰ ἔχωμεν:

$$\mathbf{n}_i = -\frac{u_{i-1}}{u_i}\,\mathbf{t}_{i-1} + \frac{v_{i-1}}{u_i}\,\mathbf{b}_{i-1}$$

$$\mathbf{b}_i = \mathbf{t}_i \times \mathbf{n}_i = \begin{vmatrix} \mathbf{t}_{i-1} & \mathbf{n}_{i-1} & \mathbf{b}_{i-1} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\dfrac{u_{i-1}}{u_i} & 0 & \dfrac{v_{i-1}}{u_i} \end{vmatrix} = \frac{v_{i-1}}{u_i}\,\mathbf{t}_{i-1} + \frac{u_{i-1}}{u_i}\,\mathbf{b}_{i-1}$$

Εὑρίσκομεν ἐπίσης:

$$u_i = |\mathbf{t}_i| = \sqrt{u^2_{i-1} + v^2_{i-1}}$$

$$v_i = \frac{(\mathbf{t}_i,\ \dot{\mathbf{t}}_i,\ \ddot{\mathbf{t}}_i)}{|\mathbf{t}_i^2|}$$

ἢ

$$v_i = \frac{1}{u^2_{i-1} + v^2_{i-1}} \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -u_{i-1} & 0 & v_{i-1} \\ -\dot{u}_{i-1} & -(u^2_{i-1} + v^2_{i-1}) & \dot{v}_{i-1} \end{vmatrix}$$

ἢ

$$v_i = \frac{u_{i-1}\dot{v}_{i-1} - \dot{u}_{i-1}v_{i-1}}{u^2_{i-1} + v^2_{i-2}}$$

RESUMÉ (*)

GÉNÉRALISATION DES FORMULES DE FRENET

I. Partie

1. Soit une courbe C, de l'espace R^3, avec équation vectorielle:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(s).$$

En tout point M de la courbe C, nous supposons, qu'ils existent:

a) Trois suites de vecteurs unitaires:

$$\begin{array}{lllll} & \mathbf{t}(s), & \mathbf{t}_1(s), & \mathbf{t}_2(s), & \ldots \\ (1) & \mathbf{n}(s), & \mathbf{n}_1(s), & \mathbf{n}_2(s), & \ldots \\ & \mathbf{b}(s), & \mathbf{b}_1(s), & \mathbf{b}_2(s), & \ldots \end{array}$$

qui déterminent une suite de trièdres D_i ($\mathbf{t}_i$, $\mathbf{n}_i$, $\mathbf{b}_i$) trirectangles et de sens direct.

b) Trois suites de fonctions analytiques:

$$\begin{array}{lllll} & u(s), & u_1(s), & u_2(s), & \ldots \\ (2) & v(s), & v_1(s), & v_2(s), & \ldots \\ & w(s), & w_1(s), & w_2(s). & \ldots \end{array}$$

où, u(s) et v(s) sont respectivement la courbure et la torsion de la courbe C au point considéré M, et $w(s) = 0$.

2. On demontre les formules ci-dessous, qu'on appelle Formules générales de Frenet»:

$$\begin{array}{ll} & \dfrac{d\mathbf{t}_i}{ds} = u_i(s)\mathbf{n}_i - w_i(s)\mathbf{b}_i \\ (3) & \dfrac{d\mathbf{n}_i}{ds} = -u_i(s)\mathbf{t}_i + v_i(s)\mathbf{b}_i \\ & \dfrac{d\mathbf{b}_i}{ds} = w_i(s)\mathbf{t}_i - v_i(s)\mathbf{n}_i(s) \end{array}$$

---

* Le resumé ci-dessous a été déjà paru aux «Vortragsauszüge des VII Österreichishen Mathematikerkongresses».

où

$$(4)\quad \begin{aligned} u_i(s) &= \dot{\mathbf{t}}_i\mathbf{n}_i = -\mathbf{t}_i\dot{\mathbf{n}}_i,\\ v_i(s) &= \dot{\mathbf{n}}_i\mathbf{b}_i = -\mathbf{n}_i\dot{\mathbf{b}}_i,\\ w(s) &= \dot{\mathbf{b}}_i\mathbf{t}_i = -\dot{\mathbf{b}}_i\mathbf{t}_i \end{aligned}$$

S'il est $w_i(s) = 0$ pour $i = 1, 2, 3, \ldots$ les formules (3) se rentrent:

$$(5)\quad \begin{aligned} \frac{d\mathbf{t}_i}{ds} &= u_i(s)\mathbf{n}_i\\ \frac{d\mathbf{n}_i}{ds} &= -u_i(s)\mathbf{t}_i + v_i(s)\mathbf{b}_i\\ \frac{d\mathbf{b}_i}{ds} &= -v_i(s)\mathbf{n}_i \end{aligned}$$

3. Ensuite, on détermine les suites (1) et (2) dans les cas suivants. Etant donné: a) $w_i(s)=0$ et $\mathbf{t}_i$, b) $w_i(s)=0$ et $\mathbf{n}_i$, c) $w_i(s)=0$ et $\mathbf{b}_i$.

II. Partie

Dans la deuxième partie de cette notte, nous considerons certains cas particuliers.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

1. Ν. Σακελλαρίου: Διανυσματικὸς Λογισμός.
2. Σ. Σαραντοπούλου: Διαφορικὴ Γεωμετρία.
3. Δελτίον Ἑλλ. Μαθ. Ἑταιρείας (τόμ. Α', τόμος ΚΕ, Νέα σειρὰ τομ. 7).
4. E. Coursat: Cours d'Analyse Mathematique tom. II.
5. Buletinul Facultatii de Stiinte din Gernauti Vol. II Fasc. 1.
6. Glasnik. Matematicko - Fizicki i Astronomski T. 10 Zagred 1955.
7. J. Spielrein: Vekrorrechnung.