ΓΕΩΡΓΙΟΥ ΒΑΡΕΛΑ

καθηγητοῦ τῶν γενικῶν καὶ οἰκονομικῶν μαθηματικῶν τῆς Α.Β.Σ.Θ.

ΥΠΕΡΒΟΛΙΚΟΣ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΙΣΜΟΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ ΔΙΤΙΜΩΝ ΜΕΤΑΒΛΗΤΩΝ

I. ΕΙΣΑΓΩΓΗ

§ 1. Η ΑΛΓΕΒΡΑ ΤΟΥ BOOLE ΤΩΝ ΔΥΟ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ (0,1)

Δίδεται τὸ σύνολον [0,1] τῶν δύο στοιχείων 0 καὶ 1. Ἐφοδιάζομεν τὸ δοθὲν σύνολον διὰ τῶν πράξεων πρόσθεσις (+) καὶ πολλαπλασιασμός (.), ὁριζομένων ὡς κάτωθι:

(1,1) $0 + 0 = 0, \quad 0 + 1 = 1, \quad 1 + 0 = 1, \quad 1 + 1 = 1$

(1,2) $1 \,.\, 1 = 1, \quad 0 \,.\, 1 = 0, \quad 1 \,.\, 0 = 0, \quad 0 \,.\, 0 = 0$

Ὁρίζομεν ἐπίσης τὸ συμπληρωματικὸν ἑκάστου τῶν στοιχείων (0,1):

(1,3) $\overline{0} = 1, \quad \overline{1} = 0$

> *Ὁρισμός* [1]: Ἡ ἀλγεβρικὴ δομὴ ἐπὶ τοῦ συνόλου [0,1], ἡ ὁρισθεῖσα διὰ τῶν πράξεων (1,1), (1,2), (1,3) καλεῖται *Ἄλγεβρα τοῦ Boole τῶν δύο στοιχείων 0 καὶ 1* καὶ σημειοῦται διὰ τοῦ B_2.

Εὐκόλως ἀποδεικνύονται, διὰ x, y, z, $\in B_2$ αἱ κάτωθι ἰδιότητες [2]:

α) Ἀντιμεταθετική:

$$\begin{cases} x + y = y + x \\ xy = yx \end{cases}$$

β) Προσεταιριστική:

$$\begin{cases} (x + y) + z = x + (y + z) \\ (xy)\, z = x(yz) \end{cases}$$

γ) Ἐπιμεριστική:

$$\begin{cases} x + (yz) = (x + y)\ (x + z) \\ x\ (y + z) = (xy) + (xz) \end{cases}$$

δ) Ὕπαρξις οὐδετέρου στοιχείου τῆς προσθέσεως καὶ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ:

$$\begin{cases} x + o = x \\ x \,.\, 1 = x \end{cases}$$

Ἀποδεικνύονται ἐπίσης αἱ σχέσεις:

ε) $\begin{cases} x + xy = x \\ x\,(x + y) = x \end{cases}$ στ) $\begin{cases} x + x = x \\ x.x = x \end{cases}$ ζ) $\begin{cases} x + \overline{x} = 1 \\ x.\overline{x} = 0 \end{cases}$

η) $\begin{cases} \overline{x + y} = \overline{x}\,\overline{y} \\ \overline{xy} = \overline{x} + \overline{y} \end{cases}$ θ) $\begin{cases} x + 1 = 1 \\ x.0 = 0 \end{cases}$

1. *Γ. Βαρελᾶ,* [1] σελ. 95.
2. *R. Faure,* [4] p. 72.

Αἱ ἀνωτέρω ἰδιότητες ἀποδεικνύονται δι' ἐπαληθεύσεως δι' ὅλων τῶν δυνατῶν τιμῶν τῶν x, y, z.

'Αποδεικνύονται [3] ἐπίσης αἱ κάτωθι ἰδιότητες ἀπορρέουσαι ἐκ τῆς σχέσεως διατάξεως:

$$0 \leqslant 1$$

1) $x \leqslant x + y \ , \ xy \leqslant x$

2) 'Εὰν $x \leqslant z$ καὶ $y \leqslant z \Rightarrow x + y \leqslant z$

3) 'Εὰν $x \leqslant y$ καὶ $x \leqslant z \Rightarrow x \leqslant yz$

4) 'Εὰν $x \leqslant y \Rightarrow$ α) $x + z \leqslant y + z$ β) $xz \leqslant yz$

§ 2. ΑΙ BOOLE - ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

'Ορισμός [4]: Καλεῖται *Boole - συνάρτησις* πᾶσα ἀπεικόνισις f τοῦ συνόλου B_2^n εἰς τὸ B_2. Δηλαδὴ

$$f: B_2^n \rightarrow B_2$$

Οὕτω αἱ συναρτήσεις:

$f(x,y) = \bar{x}y + x\bar{y} + \overline{xy}$,

$f(x, y, z) = \overline{xy}z + \bar{x}yz + \overline{xyz} + \overline{xyz}$

ἔνθα $x, y, z \in B_2$ εἶναι Boole - συναρτήσεις.

§ 3. ΑΙ ΨΕΥΔΟ - BOOLE ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

'Ορισμός [5]: Καλεῖται *ψευδο - Boole συνάρτησις* πᾶσα ἀπεικόνισις f τοῦ συνόλου B_2^n εἰς τὸ R. Δηλαδή:

$$f: B_2^n \rightarrow R$$

Οὕτω ἡ συνάρτησις:

(3,1) $f(X) = f(x_1, x_2, x_3) = 10 + 2x_1 - 5x_2 \bar{x}_3 + 4 \bar{x}_1 x_2 x_3$

ἔνθα $X = (x_1, x_2, x_3) \in B_2^3$, εἶναι ψευδο - Boole συνάρτησις.

'Η συνάρτησις (3,1) δύναται νὰ γραφῇ καὶ ὡς ἀκολούθως:

$f(X) = 10 + 2x_1 - 5x_2 (1 - x_3) + 4 (1 - x_1) x_2 x_3$

(3,2) $f(X) = 10 + 2x_1 - 5x_2 + 9x_2 x_3 - 4 x_1 x_2 x_3$

'Επίσης δύναται νὰ γραφῇ καὶ ὡς κάτωθι:

$$f(X) = 10 (x_1 + \bar{x}_1) (x_2 + \bar{x}_2) (x_3 + \bar{x}_3) + 2x_1 (x_2 + \bar{x}_2) (x_3 + \bar{x}_3) - 5 (x_1 + \bar{x}_1) x_2 \bar{x}_3 + 4 \bar{x}_1 x_2 x_3$$

3. *J. Kuntzmann,* [7] p. 12.
4. *P. Hammer - S. Rudeanu,* [6] p. 9.
5. *P. Hammer - S. Rudeanu,* [6] p. 25.

ἢ

(3,3) $f(X) = 12\, x_1\, x_2\, x_3 + 14\, \bar{x}_1\, x_2\, x_3 + 12\, x_1\, \bar{x}_2\, x_3 + 7\, x_1\, x_2\, \bar{x}_3$
$+ 10\, \bar{x}_1\, \bar{x}_2\, x_3 + 12\, x_1\, \bar{x}_2\, \bar{x}_3 + 5\, \bar{x}_1\, x_2\, \bar{x}_3 + 10\, \bar{x}_1\, \bar{x}_2\, \bar{x}_3$

Τὸ πλῆθος τῶν τιμῶν τὰς ὁποίας δύναται νὰ λάβη μία ψευδο - Boole συνάρτησις εἶναι ἴσον πρὸς 2^n, δηλαδὴ ἴσον πρὸς τὸ πλῆθος τῶν ἐπαναληπτικῶν διατάξεων τῶν (0,1) ἀνὰ n.

Οὕτω ἡ συνάρτησις (3,1) δύναται νὰ λάβη τὰς ὀκτὼ τιμὰς
$f(0,0,0) = 10,\ f(0,0,1) = 10,\ f(0,1,0) = 5,\ f(0,1,1) = 14$
$f(1,0,0) = 12,\ f(1,0,1) = 12,\ f(1,1,0) = 7,\ f(1,1,1) = 12$

Μία ψευδο - Boole συνάρτησις θὰ λέγεται *γραμμικὴ* ἐὰν εἶναι τῆς μορφῆς:

(3,4) $$f(X) = a_0 + \sum_{i=1}^{n} a_i\, x_i$$

ἔνθα a_0, $a_i \in R$ *καὶ* $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in B_2^n$

Οὕτω ἡ συνάρτησις:
$f(X) = 5 + 2x_1 - 3x_2 + 7x_3 - 8x_4 + x_5$
ἔνθα $X = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in B_2^5$, εἶναι γραμμικὴ ψευδο - Boole συνάρτησις.

Μία ψευδο - Boole συνάρτησις θὰ λέγεται *κλασματικὴ* ἢ *ὑπερβολικὴ* ἐὰν εἶναι τῆς μορφῆς:

(3,5) $$F(X) = \frac{a_0 + \sum_{i=1}^{n} a_i\, x_i}{b_0 + \sum_{i=1}^{n} b_0\, x_i}$$

ἔνθα $a_0, a_i, b_0, b_i \in R$, $i = 1, 2, \ldots, n$ καὶ $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in R_2^n$

§ 4. ΕΛΑΧΙΣΤΟΠΟΙΗΣΙΣ ΤΗΣ ΓΡΑΜΜΙΚΗΣ ΨΕΥΔΟ-BOOLE ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΣ

Ὁρισμός [6]: Ἓν διάνυσμα $X^* = (x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*) \in B_2^n$ καθιστᾶ τὴν ψευδο - Boole συνάρτησιν $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ ἐλαχίστην, ἐὰν εἶναι:

(4,1) $f(X^*) \leq f(X)$ διὰ πᾶν $X \in B_2^n$

ἢ

(4,2) $f(x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*) \leq f\,(x_1, x_2, \ldots, x_n)$
διὰ πᾶν $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in B_2^n$

6. *P. Hammer - S. Rudeanu,* [6] p. 119.

Ἡ $f(x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*)$ καλεῖται *ἐλαχίστη τιμὴ* τῆς $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ ἢ ἁπλῶς *ἐλάχιστον* αὐτῆς.

Ἡ ἐλαχιστοποίησις τῆς γραμμικῆς ψευδο - Boole συναρτήσεως

$$(4,3) \quad f(X) = a_0 + \sum_{i=1}^{n} a_i x_i$$

ἔνθα a_0, a_i σταθεραὶ $\in R$ καὶ $x_i \in B_2$, εὑρίσκεται εὐκόλως.

Πράγματι, τὰ σημεῖα $X^* = (x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*)$ τὰ καθιστῶντα ἐλαχίστην τὴν ψευδο - Boole συνάρτησιν (4,3) ὁρίζονται ὑπὸ τῆς σχέσεως:

$$(4,4) \qquad x_i = \begin{cases} 1 \text{ ἐὰν } a_i < 0 \\ 0 \text{ ἐὰν } a_i > 0 \\ p_i \text{ ἐὰν } a_i = 0 \end{cases}$$

ἔνθα $p_i \in B^2$ παράμετρος.

Οὕτω, τὸ σημεῖον τὸ καθιστῶν ἐλαχίστην τὴν ψευδο - Boole γραμμικὴν συνάρτησιν:

$$f_1(X) = 10 + 5x_1 - 3x_2 - x_3 + 6x_4 + 2x_5 - 7x_6$$

εἶναι προφανῶς τό:

$$x_1 = 0,\ x_2 = 1,\ x_3 = 1,\ x_4 = 0,\ x_5 = 0,\ x_6 = 1$$

καὶ ἡ ἐλαχίστη τιμὴ τῆς $f_1(X)$ εἶναι:

$$f_1\ (0,\ 1,\ 1,\ 0,\ 0,\ 1) = 10 - 3 - 1 - 7 = -1$$

Ἐπίσης, τὰ σημεῖα τὰ καθιστῶντα ἐλαχίστην τὴν γραμμικὴν ψευδο - Boole συνάρτησιν:

$$f_2(X) = 12 + 3x_1 - 7x_2 + x_4 - x_6$$

εἶναι προφανῶς τά:

$$x_1 = 0,\ x_2 = 1,\ x_3 = p_1,\ x_4 = 0,\ x_5 = p_2,\ x_6 = 1$$

ἔνθα p_1, $p_2 \in B_2$ παράμετροι.

Ἡ ἐλαχίστη τιμὴ τῆς $f_2(X)$ εἶναι:

$$f_2(0,\ 1,\ p_1,\ 0,\ p_2,\ 1) = 12 - 7 - 1 = 4.$$

Ἀναλόγως ὁρίζεται καὶ εὑρίσκεται ἡ *μεγίστη τιμὴ* μιᾶς ψευδο - Boole γραμμικῆς συναρτήσεως.

Οὕτω, τῆς συναρτήσεως:

$$f_3(X) = 4 + 3x_1 - 5x_2 + 4x_3 - 6x_5$$

τὰ σημεῖα:

$$x_1 = 1,\ x_2 = 0,\ x_3 = 1,\ x_4 = p,\ x_5 = 0$$

ἔνθα $p \in B_2$ καθιστοῦν τὴν τιμὴν τῆς $f_3(X)$ μεγίστην καὶ εἶναι:

$$\max f_3(X) = f_3\ (1,\ 0,\ 1,\ p,\ 0) = 11.$$

Ἡ ἐλαχιστοποίησις τῆς γραμμικῆς ψευδο - Boole συναρτήσεως:

(4,5) $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = a_0 + \sum_{i=1}^{n} a_i x_i$

ὑποκειμένης εἰς τοὺς περιορισμοὺς

(4,6) $f_j(x_1, x_2, \ldots, x_m) \geq 0, \; j = 1, 2, \ldots, m$

δύνανται νὰ πραγματοποιηθῇ κατὰ διαφόρους τρόπους.

Πρῶτος τρόπος [7]: α) Εὑρίσκομεν τὰς οἰκογενείας τῶν λύσεων τοῦ συστήματος (4,6) [8].

β) Εὑρίσκομεν δι' ἑκάστην οἰκογένειαν λύσεων τοῦ συστήματος (4,6) τὸ ἐλάχιστον τῆς (4,5).

γ) Εὑρίσκομεν τὸ ἐλάχιστον ἐκ τῶν ἐλαχίστων ἑκάστης οἰκογενείας λύσεων.

Τὸ οὕτω εὑρεθὲν ἐλάχιστον εἶναι τὸ ζητούμενον.

Δεύτερος τρόπος [9]: α) Εἰς τοὺς περιορισμοὺς (4,6) εἰσάγομεν ἐπὶ πλέον τὸν περιορισμὸν

(4,7) $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \leq M_r$

ἔνθα M_r παράμετρος, ὁριζομένη οὕτως ὥστε νὰ εἶναι:

$$M_0 = f(x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*)$$

ἔνθα $(x_1^*, x_2^*, \ldots, x_4^*)$ λύσις τοῦ συστήματος (4,6) ἢ M_0 ἴσον πρὸς τὸ ἄθροισμα τοῦ σταθεροῦ ὅρου τῆς (4,4) καὶ τῶν θετικῶν συντελεστῶν αὐτῆς.

β) Εὑρίσκομεν μίαν λύσιν τῆς (4,7) ὑπὸ τοὺς περιορισμοὺς (4,6). Ἐὰν τὸ $X^r = (x_1^r, x_2^r, \ldots, x_n^r)$ εἶναι μία τοιαύτη λύσις τῆς (4,7), θέτομεν:

$$M_{r+1} = f(x_1^r, x_2^r, \ldots, x_n^r)$$

καὶ συνεχίζομεν ἐκ νέου τὴν ἀνωτέρω διαδικασίαν.

Οὕτω διὰ τὴν εὕρεσιν τοῦ ἐλαχίστου τῆς γραμμικῆς ψευδο - Boole συναρτήσεως

$$f(X) = 10 + x_1 - 5x_2 + 3x_3 - 7x_4 - 6x_5 + x_6$$

ὑποκειμένης εἰς τοὺς περιορισμοὺς

$$f_1(X) = 2 + x_1 + 3x_2 - x_3 - x_4 + 5x_5 + x_6 \geq 0$$

$$f_2(X) = 10 + 2x_1 - 3x_2 - 5x_3 + x_4 + x_5 - x_6 \geq 0$$

ἐργαζόμεθα ὡς ἀκολούθως:

α) Εὑρίσκομεν τὸ μέγιστον τῆς f(X). Πρὸς τοῦτο θέτομεν:

$$x_i = \begin{cases} 1 & \text{ἐὰν } a_i > 0 \\ 0 & \text{ἐὰν } a_i < 0 \\ p_i & \text{ἐὰν } a_i = 0 \end{cases}$$

7. *P. Hammer - S. Rudeanu*, [6] p. 121.
8. *P. Hammer - S. Rudeanu*, [6] p. 77.
9. *P. Hammer - S. Rudeanu*, [6] p. 124.

ἔνθα pi παράμετρος ἐν B_2. Εὑρίσκομεν οὕτω:

$$X^0 = (1, 0, 1, 0, 0, 1) \text{ καὶ } f(X^0) = 10 + 1 + 3 + 1 = 15$$

β) Θέτομεν ἤδη:

$$10 + x_1 - 5x_2 + 3x_3 - 7x_4 - 6x_5 + x_6 \leq 15$$

ἢ

$$f_3(X) = -5 + x_1 - 5x_2 + 3x_3 - 7x_4 - 6x_5 + x_6 \leq 0$$

καὶ εὑρίσκομεν ἓν διάνυσμα X^1 ἐπαληθεῦον τὸ σύστημα:

$$f_3(X) \leq 0, \; f_1(X) \geq 0, \; f_2(X) \geq 0$$

Εὑρίσκομεν οὕτω: $X^1 = (0, 1, 0, 1, 1, 0)$ καὶ εἶναι:

$$f_3(X^1) = 10 - 5 - 7 - 6 = -8 < 0$$

$$f_1(X^1) = 2 + 3 - 1 + 5 = 9 > 0$$

$$f_2(X^1) = 10 - 3 + 1 + 1 = 9 > 0$$

γ) Θέτομεν ἐν συνεχείᾳ:

$$10 + x_1 - 5x_2 + 3x_3 - 7x_4 - 6x_5 + x_6 \leq -8$$

ἢ

$$f_4(X) = 18 + x_1 - 5x_2 + 3x_3 - 7x_4 - 6x_5 + x_6 \leq 0$$

καὶ εὑρίσκομεν διάνυσμα X^2 ἐπαληθεῦον τὸ σύστημα:

$$f_4(X) \leq 0, \; f_1(X) \geq 0, \; f_2(X) \geq 0.$$

Ἐπειδὴ ἤδη τὸ μόνον διάνυσμα τὸ ἐπαληθεῦον τὴν $f_4(X) \leq 0$ εἶναι τὸ X^1 καὶ εἶναι $f_4(X^1) = 0$, ἕπεται ὅτι τὸ διάνυσμα $X^1 = (0, 1, 0, 1, 1, 0)$ εἶναι τὸ διάνυσμα τὸ καθιστῶν ἐλαχίστην τὴν τιμὴν τῆς $f(X)$ ὑπὸ τοὺς περιορισμοὺς $f_1(X) \geq 0$, $f_2(X) \geq 0$.

II. ΕΛΑΧΙΣΤΟΠΟΙΗΣΙΣ ΤΗΣ ΥΠΕΡΒΟΛΙΚΗΣ ΨΕΥΔΟ-BOOLE ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΣ

§ 5. ΤΟ ΓΕΝΙΚΟΝ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΕΛΑΧΙΣΤΟΠΟΙΗΣΕΩΣ ΤΗΣ ΥΠΕΡΒΟΛΙΚΗΣ ΨΕΥΔΟ-BOOLE ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΣ

Τὸ πρόβλημα τῆς ἐλαχιστοποιήσεως τοῦ κόστους παραγωγῆς ἑνὸς προϊόντος, δηλαδὴ τὸ πηλίκον τῆς συναρτήσεως τοῦ ὁλικοῦ κόστους, ἡ ὁποία εἶναι συνήθως γραμμικὴ συνάρτησις, διὰ τῆς συναρτήσεως τῆς ποσότητος παραγωγῆς, ἡ ὁποία εἶναι ἐπίσης γραμμικὴ συνάρτησις, εἶναι ἓν παράδειγμα ἐλαχιστοποιήσεως μιᾶς ὑπερβολικῆς συναρτήσεως.

Τὸ πρόβλημα αὐτὸ ἔχει μελετηθῆ ὑπὸ τῶν A. Charnes - W. Cooper [2] καὶ ὑπὸ τοῦ W. Dinkelbach [3] ἄνευ περιορισμῶν, ὑπὸ δὲ τῶν P. Robillard [8] καὶ P. Hammer - S. Rudeanu [6] εἰς τὴν περίπτωσιν διτίμων μεταβλητῶν ἄνευ περιορισμῶν ἢ μετὰ περιορισμῶν ἐκπεφρασμένων ὑπὸ ἀνισοτήτων ἐπὶ τῶν αὐξουσῶν ψευδο - Boole συναρτήσεων.

Τίθεται ἤδη τὸ κάτωθι πρόβλημα:

Πρόβλημα I. Νὰ εὑρεθῆ τὸ ἐλάχιστον τῆς συναρτήσεως:

$$(5,1)\quad F(X) = \frac{a_0 + \sum_{i=1}^{n} a_i x_i}{b_0 + \sum_{i=1}^{n} b_i x_i}$$

ὑποκειμένης εἰς τοὺς περιορισμοὺς

$(5,2)\quad x_i = \{0,1\},\ i = 1, 2, \ldots, n$

$(5,3)\quad H_j(X) \geqq 0,\ j = 1, 2, \ldots, m$

ἔνθα $H_j(X)$ ψευδο - Boole γραμμικαὶ συναρτήσεις.

Τὸ ἀνωτέρω πρόβλημα (I) ἔχει μελετηθῆ ὑπὸ τῶν P. Hammer - S. Rudeanu [10] εἰς τὴν περίπτωσιν κατὰ τὴν ὁποίαν εἶναι:

$$a_i \geqq 0,\ \text{καὶ}\ b_i \geqq 0,\quad i = 0, 1, 2, \ldots, n$$

καὶ ὑπὸ τῶν M. Florian - P. Robillard [11] εἰς τὴν περίπτωσιν κατὰ τὴν ὁποίαν εἶναι:

$$b_i \geqq 0,\ i = 0, 1, 2, \ldots, n.$$

Θὰ μελετήσωμεν ἤδη τὸ πρόβλημα (I) ἄνευ περιορισμῶν ἐπὶ τῶν συντελεστῶν a_i, b_i, $i = 0, 1, 2, \ldots, n$.

10. *P. Hammer - S. Rudeanu*, [6] p. 176.
11. *M. Florian - P. Robillard*, [5] p. 3.

Διὰ τὴν μελέτην τοῦ τεθέντος προβλήματος (I) θέτομεν:

$$(5,4) \qquad H_0(X) = b_0 + \sum_{i=1}^{n} b_i x_i$$

καὶ ὑποθέτοντες:

α) $H_0(X) > 0$, β) $H_0(X) < 0$

μετασχηματίζομεν τὸ ἀρχικὸν πρόβλημα (I) εἰς τὰ κατωτέρω δύο μερικώτερα προβλήματα (II) καὶ (III).

Πρόβλημα II. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐλάχιστον τῆς συναρτήσεως

$$(5,1) \qquad F(X) = \frac{a_0 + \sum_{i=1}^{n} a_i x_i}{b_0 + \sum_{i=1}^{n} b_i x_i}$$

ὑποκειμένης εἰς τοὺς περιορισμοὺς

$(5,2) \qquad x_i = \{0,\ 1\},\ i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n$

$(5,3) \qquad H_j(X) \geqslant 0,\ j = 1,\ 2,\ \ldots,\ m$

$(5,5) \qquad H_0(X) > 0$

Πρόβλημα III. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐλάχιστον τῆς συναρτήσεως

$$(5,1) \qquad F(X) = \frac{a_0 + \sum_{i=1}^{n} a_i x_i}{b_0 + \sum_{i=1}^{n} b_i x_i}$$

ὑποκειμένης εἰς τοὺς περιορισμοὺς

$(5,2) \qquad x_i = [0,1],\ i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n$

$(5,3) \qquad H_j(X) \geqslant 0,\ j = 1,\ 2,\ \ldots,\ m$

$(5,6) \qquad H_0(X) < 0$

Ἐὰν E_1 εἶναι τὸ ἐλάχιστον τῆς (5,1) ὑποκειμένης εἰς τοὺς περιορισμοὺς (5,2), (5,3), (5,5) καὶ E_2 εἶναι τὸ ἐλάχιστον αὐτῆς ὑποκειμένης εἰς τοὺς περιορισμοὺς (5,2), (5,3), (5,6), τὸ ἐλάχιστον ἐκ τῶν E_1, E_2 θὰ εἶναι ἡ ζητουμένη ἐλάχιστη τιμὴ τῆς (5,1) τοῦ ἀρχικοῦ προβλήματος (I).

§ 6. ΛΥΣΙΣ ΤΟΥ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ (II)

Διὰ τὴν λύσιν τοῦ προβλήματος (II) ἐφαρμόζομεν τὴν ὑπὸ τῶν M. Florian καὶ P. Robillard [12] προταθεῖσαν μέθοδον, ἤτοι:

α) Εὑρίσκομεν ἓν διάνυσμα X^0, τὸ ὁποῖον νὰ μεγιστοποιῇ τὴν συνάρτησιν (5,1) ἄνευ περιορισμῶν ἢ νὰ καθιστᾷ τὴν τιμὴν τῆς συναρτήσεως (5,1) ἴσην πρὸς ἓν ἀνώτερον φράγμα τοῦ συνόλου τῶν τιμῶν αὐτῆς.

12. *M. Florian - P. Robillard* [5] p. 3.

Ἔστω:

(6,1) $F(X^0) = k_0$

β) Θέτομεν:

$$(6,2) \qquad \frac{a_0 + \sum\limits_{i=1}^{n} a_i x_i}{b_0 + \sum\limits_{i=1}^{n} b_i x_i} \leq k_0$$

Ἡ ἀνισότης (6,2) λόγῳ τῆς ὑποθέσεως (5,5) δύναται νὰ γραφῇ καὶ ὡς κάτωθι:

$$(6,3) \qquad F_0(X) = (a_0 - k_0 b_0) + \sum_{i=1}^{n} (a_i - k_0 b_i)\, x_i \leq 0$$

Ἀγόμεθα οὕτω εἰς τὴν λύσιν τοῦ κατωτέρω γραμμικοῦ προβλήματος:

Πρόβλημα (Π_1): Νὰ ἐλαχιστοποιηθῇ ἡ συνάρτησις (6,3) ὑποκειμένη εἰς τοὺς περιορισμοὺς (5,2), (5,3), (5,5).

Ἐὰν X^1 εἶναι ἡ λύσις τοῦ προβλήματος (Π_1), θὰ εἶναι προφανῶς:

$F(X^1) \leq F(X^0)$

Ἐὰν εἶναι:

$F_0\ (X^1) = 0$

τὸ X^1 εἶναι τὸ διάνυσμα τὸ καθιστῶν ἐλαχίστην τὴν $F(X)$ ὑπὸ τοὺς περιορισμοὺς (5,2), (5,3), (5,5).

Ἐὰν εἶναι:

$F_0(X^1) < 0$

θὰ εἶναι ἐπίσης:

$F(X^1) = k_1 < F(X^0)$

καὶ θέτοντες:

$F(X) \leq k_1$

εὑρίσκομεν:

$$(6,4) \qquad F_1(X) = (a_0 - k_1 b_0) + \sum_{i=1}^{n} (a_i - k_1 b_i) x_i \leq 0$$

Ἀγόμεθα ἤδη εἰς τὴν λύσιν τοῦ κατωτέρω γραμμικοῦ προβλήματος:

Πρόβλημα (Π_2). Νὰ ἐλαχιστοποιηθῇ ἡ συνάρτησις (6,4) ὑποκειμένη εἰς τοὺς περιορισμοὺς (5,2), (5,3), (5,5).

Ἐὰν X^2 εἶναι ἡ λύσις τοῦ προβλήματος (Π_2) θὰ εἶναι:

$F(X^2) \leq F(X^1)$

Ἐὰν εἶναι:

$F_1(X^2) = 0$

τὸ X^2 εἶναι τὸ διάνυσμα τὸ καθιστῶν ἐλαχίστην τὴν $F(X)$ ὑπὸ τοὺς περιορισμοὺς (5,2), (5,3), (5,5).

Ἐὰν εἶναι:

$$F_1(X^2) < 0$$

θὰ εἶναι:

$$F(X^2) < F(X^1)$$

καὶ θέτοντες

$$F(X^2) = k_2$$

ἀγόμεθα εἰς ἓν πρόβλημα (II_3) ὅμοιον πρὸς τὰ (II_1), (II_2).

Ἐργαζόμενοι κατ' αὐτὸν τὸν τρόπον εὑρίσκομεν μίαν ἀκολουθίαν διανυσμάτων:

$$(6,5) \qquad X^0,\ X^1,\ X^2,\ \ldots,\ X^q$$

τοῦ χώρου B_2^n, τὰ ὁποῖα ἐπαληθεύουν τὰς (5,3), (5,5) καὶ εἶναι τοιαῦται ὥστε:

$$F(X^{i+1}) < F(X^i) \qquad i = 1,\ 2,\ \ldots,\ q$$

Τὸ τελευταῖον διάνυσμα X^q τῆς ἀκολουθίας (6,5) εἶναι μία λύσις τοῦ προβλήματος (II) καὶ ἡ $F(X^q)$ εἶναι ἡ ἐλαχίστη τιμὴ τῆς συναρτήσεως $F(X)$ ὑποκειμένης εἰς τοὺς περιορισμοὺς (5,2), (5,3), (5,5).

§ 7. ΛΥΣΙΣ ΤΟΥ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ (III)

Μετὰ τὸν προσδιορισμὸν τοῦ διανύσματος X^q τῆς ἀκολουθίας (6,5), ζητοῦμεν νὰ εὕρωμεν διάνυσμα $X^{q+1} \in B_2^n$ τοιοῦτον ὥστε νὰ εἶναι:

$$(7,1) \qquad F(X^{q+1}) \leqq F(X^q)$$

καὶ ἐπαληθεῦον τὰς σχέσεις (5,3), (5,6).

Πρὸς τοῦτο θέτομεν:

$$(7,2) \qquad F(X) = \frac{a_0 + \sum\limits_{i=1}^{n} a_i x_i}{b_0 + \sum\limits_{i=1}^{n} b_i x_i} \leqq k_q = F(X^q)$$

Ἡ ἀνισότης αὕτη λόγῳ τῆς ὑποθέσεως (5,6) γράφεται ὡς ἑξῆς:

$$(7,3) \qquad (a_0 - k_q b_0) + \sum_{i=1}^{n} (a_i - k_q b_i)\, x_i \geqq 0$$

Ἐὰν καλέσωμεν:

$$(7,4) \qquad F_q(X) = (a_0 + k_q b_0) + \sum_{i=1}^{n} (a_i - k_q b_i)\, x_i$$

ἀγόμεθα εἰς τὴν λύσιν τοῦ κατωτέρω γραμμικοῦ προβλήματος:

Πρόβλημα (III_q): Νὰ μεγιστοποιηθῇ ἡ συνάρτησις (7,4), ὑποκειμένη εἰς τοὺς περιορισμοὺς (5,2), (5,3), (5,6).

Ἐργαζόμενοι ὅπως εἰς τὴν προηγουμένην παράγραφον εὑρίσκομεν μίαν ἀκολουθίαν διανυσμάτων:

(7,5) $X^{q+1}, X^{q+2}, \ldots, X^{q+r}$

τοῦ χώρου B_2^n, τὰ ὁποῖα ἐπαληθεύουν τὰς (5,3), (5,6) καὶ εἶναι τοιαῦτα ὥστε:

$$F(X^{q+j+1}) < F(X^{q+j}) \quad j = 0, 1, 2, \ldots, r-1$$

Τὸ τελευταῖον διάνυσμα X^{q+r} τῆς ἀκολουθίας (7,5) εἶναι μία λύσις τοῦ προβλήματος (III) καὶ ἡ $F(X^{q+r})$ εἶναι ἡ ἐλαχίστη τιμὴ τῆς συναρτήσεως $F(X)$ ὑπὸ τοὺς περιορισμοὺς (5,2) καὶ (5,3).

Παρατηρήσεις: i) Ἐὰν ἡ συνάρτησις (5,1) τοῦ προβλήματος (I), ὑποκειμένη εἰς τοὺς περιορισμοὺς (5,2), (5,3), λαμβάνῃ τὴν ἐλαχίστην τιμὴν αὐτῆς διὰ περισσότερα τοῦ ἑνὸς διανύσματα, διὰ τῆς περιγραφείσης μεθόδου λαμβάνομεν ἓν ἐξ αὐτῶν, ἔστω τὸ X^{q+r}. Διὰ τὴν εὕρεσιν καὶ τῶν ὑπολοίπων διανυσμάτων λύομεν τὸ σύστημα τῶν ψευδο - Boole ἐξισώσεων καὶ ἀνισοτήτων.

$$F(X) = F(X^{q+r})$$
$$H_i\ (X) \geq 0 \qquad i = 1, 2, \ldots, m$$

ii) Ἀναλόγως ἐργαζόμεθα ἐὰν ζητοῦμεν τὴν μεγίστην τιμὴν τῆς συναρτήσεως (5,1) τοῦ προβλήματος (I), ὑποκειμένης εἰς τοὺς περιορισμοὺς (5,2) καὶ (5,3).

III. ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΑ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

Εἰς τὸ μέρος αὐτὸ θὰ ἀναφέρωμεν δύο ἀριθμητικὰ παραδείγματα: τὸ πρῶτον ἄνευ οὐδενὸς περιορισμοῦ· εἰς τὸ δεύτερον οἱ περιορισμοὶ θὰ εἶναι γραμμικαὶ ἀνισότητες τῶν μεταβλητῶν

§ 8. ΠΡΟΒΛΗΜΑ 1ον

Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐλάχιστον τῆς ψευδο - Boole συναρτήσεως:

$$(8,1) \quad F(X) = \frac{10-5x_1-3x_2+4x_3+x_4-x_5+x_6}{6+x_1-2x_2-4x_3-3x_4+x_5+x_6}$$

α) Ὑποθέτομεν:

$$(8,2) \quad H(X) = 6+x_1-2x_2-4x_3-3x_4+x_5+x_6>0$$

α_1) Ἐπειδὴ ἡ ἐλαχίστη θετικὴ τιμὴ τοῦ παρονομαστοῦ εἶναι 1 καὶ λαμβάνει χώραν διὰ $X=(0,\ 1,\ 0,\ 1,\ 0,\ 0)$ καὶ διὰ τὴν τιμὴν αὐτὴν ὁ ἀριθμητὴς εἶναι ἴσος πρὸς 8, ὁ ἀριθμὸς οὗτος εἶναι ἓν ἀνώτερον φράγμα τῆς $F(X)$. Δυνάμεθα συνεπῶς νὰ λάβωμεν:

$X^0=(0,\ 1,\ 0,\ 1,\ 0,\ 0)$ καὶ $F(X^0)=8$.

Θέτομεν:

$$\frac{10-5x_1-3x_2+4x_3+x_4-x_5+x_6}{6+x_1-2x_2-4x_3-3x_4+x_5+x_6} \mathrel{\|\!\!\!\setminus} 8$$

Ἔχοντες ὑπ' ὄψιν τὴν (8,2) λαμβάνομεν:

$$10-5x_1-3x_2+4x_3+x_4-x_5+x_6 \leqq 48+8x_1-16x_2-32x_3-24x_4+8x_5+8x_6$$

ἢ

$$-38-13x_1+13x_2+36x_3+25x_4-9x_5-7x_6 \leqq 0$$

Εὑρίσκομεν τὴν ἐλαχίστην τιμὴν τῆς συναρτήσεως:

$$(8,4) \quad F_1(X) = -38-13x_1+13x_2+36x_3+25x_4-9x_5-7x_6$$

ὑπὸ τὸν περιορισμὸν (8,2).

Τὸ διάνυσμα $X^1=(1,\ 0,\ 0,\ 0,\ 1,\ 1)$ καθιστᾶ ἐλαχίστην τὴν (8,4) καὶ εἶναι:

$$H(X^1)=6+1+1+1=9>0, \quad F_1(X^1)=-38-13-9-7<0$$

α_2) Εὑρίσκομεν τὴν τιμὴν τῆς $F(X)$ διὰ $X=X^1=(1,\ 0,\ 0,\ 0,\ 1,\ 1)$

$$F(X^1)=\frac{10-5-1+1}{6+1+1+1}=\frac{5}{9}$$

καὶ θέτομεν:

$$F(X) = \frac{10—5x_1—3x_2 + 4x_3 + x_4—x_5 + x_6}{6 + x_1—2x_2—4x_3—3x_4 + x_5 + x_6} \leqq \frac{5}{9}$$

Ἔχοντες ὑπ' ὄψιν τὴν (8,2) λαμβάνομεν:

(8,5) $60—50x_1—17x_2 + 40x_3 + 24x_4—14x_5 + 5x_6 \leqq 0$

Εὑρίσκομεν τὴν ἐλαχίστην τιμὴν τῆς συναρτήσεως

(8,6) $F_2(X) = 60—50x_1—17x_2 + 40x_3 + 24x_4—14x_5 + 5x_6$

ὑπὸ τὸν περιορισμὸν (8,2).

Τὸ διάνυσμα $X^2 = (1, 1, 0, 0, 1, 0)$ καθιστᾶ τὴν (8,6) ἐλαχίστην καὶ εἶναι:

$H(X^2) = 6 + 1—2 + 1 = 6 > 0, \ F_2(X^2) = 60—50—17—14 = —21 < 0$

α_3) Εὑρίσκομεν τὴν τιμὴν τῆς F(X) διὰ $X = X^2 = (1, 1, 0, 0, 1, 0)$

$$F(X^2) = \frac{10—5—3—1}{6 + 1—2 + 1} = \frac{1}{6}$$

καὶ θέτομεν:

$$F(X) = \frac{10—5x_1—3x_2 + 4x_3 + x_4—x_5 + x_6}{6 + x_1—2x_2—4x_3—3x_4 + x_5 + x_6} \leqq \frac{1}{6}$$

Ἔχοντες ὑπ' ὄψιν τὴν (8,2) λαμβάνομεν:

(8,7) $F_3(X) = 54—31x_1—16x_2 + 28x_3 + 9x_4—7x_5 + 5x_6 \leqq 0$

Ἡ συνάρτησις $F_3(X)$ διὰ $X = X^2 = (1, 1, 0, 0, 1, 0)$ γίνεται ἴση πρὸς τὸ μηδὲν ἐνῶ διὰ πᾶσαν ἄλλην τιμὴν τοῦ X γίνεται θετική, συνεπῶς ἡ ἐλαχίστη τιμὴ τῆς F(X) ὑπὸ τὸν περιορισμὸν (8,2) εἶναι:

$$F(X^2) = \frac{1}{6}$$

β) Ὑποθέτομεν:

(8,8) $H(X) = 6 + x_1—2x_2—4x_3—3x_4 + x_5 + x_6 < 0$

β_1) Θέτομεν:

$$\frac{10—5x_1—3x_2 + 4x_3 + x_4—x_5 + x_6}{6 + x_1—2x_2—4x_3—3x_4 + x_5 + x_6} \leqq \frac{1}{6}$$

Ἔχοντες ὑπ' ὄψιν τὴν (8,8) λαμβάνομεν:

(8,9) $F_3(X) = 54—31x_1—16x_2 + 28x_3 + 9x_4—7x_5 + 5x_6 \geqq 0$

Εὑρίσκομεν τὴν μεγίστην τιμὴν τῆς συναρτήσεως $F_3(X)$ ὑπὸ τὸν περιορισμὸν (8,8).

Τὸ διάνυσμα $X^3 = (0, 0, 1, 1, 0, 0)$ καθιστᾶ μεγίστην τὴν (8,9) ὑπὸ τὸν περιορισμὸν (8,8) καὶ εἶναι:

$F_3(X^3) = 54 + 28 + 9 = 91 > 0$

β_2) Εὑρίσκομεν τὴν τιμὴν τῆς F(X) διὰ $X = X^3 = (0, 0, 1, 1, 0, 0)$

$$F(X^3) = \frac{10 + 4 + 1}{6—4—3} = —15$$

καὶ θέτομεν:

$$F(X) = \frac{10-5x_1-3x_2+4x_3+x_4-x_5+x_6}{6+x_1-2x_2-4x_3-3x_4+x_5+x_6} \leq -15$$

Ἔχοντες ὑπ' ὄψιν τὴν (8,8) λαμβάνομεν:

(8,10) $F_4(X) = 100 + 10x_1-33x_2-56x_3-44x_4+14x_5+16x_6 \geq 0$

Εὑρίσκομεν τὴν μεγίστην τιμὴν τῆς $F_4(X)$ ὑπὸ τὸν περιορισμὸν (8,8).

Ἐπειδὴ αἱ λύσεις τῆς (8,8) εἶναι τὰ διανύσματα $X^3 = (0, 0, 1, 1, 0, 0)$ καὶ $X^4 = (0, 1, 1, 1, 0, 0)$ καὶ τὸ μὲν X^4 δὲν ἐπαληθεύει τὴν (8,10), τὸ δὲ X^3 μηδενίζει τὴν $F_4(X)$, ἕπεται ὅτι ἡ ἐλαχίστη τιμὴ τῆς $F(X)$ εἶναι -15 καὶ λαμβάνει χώραν διὰ $X = (0, 0, 1, 1, 0, 0)$.

§ 9. ΠΡΟΒΛΗΜΑ 2ον

Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἐλαχίστη τιμὴ τῆς ψευδο - Boole συναρτήσεως

(9,1) $F(X) = \dfrac{12+x_2-5x_3+2x_4-3x_6}{8-3x_1+2x_3-7x_5}$

ὑποκειμένης εἰς τοὺς περιορισμοὺς

(9,2) $H_1(X) = 5+x_1-3x_2-4x_3 \geq 0$

(9,3) $H_2(X) = 6-3x_1-4x_2+x_3-3x_4+x_5-x_6 \geq 0$

α) Ὑποθέτομεν:

(9,4) $H_3(X) = 8-3x_1+2x_3-7x_5 > 0$

$α_1$) Διὰ $X^0 = (0, 0, 0, 0, 1, 0)$ ἐπαληθεύονται αἱ (9,2), (9,3), (9,4) καὶ εἶναι $F(X^0) = 12$.

Θέτομεν:

$$F(X) \leq 12$$

καὶ ἔχοντες ὑπ' ὄψιν τὴν (9,4) εὑρίσκομεν:

(9,5) $F_1(X) = -84+36x_1+x_2-29x_3+2x_4+84x_5-3x_6 \leq 0$

Διὰ $X = X^1 = (0, 0, 1, 0, 0, 1)$ ἡ $F_1(X)$ καθίσταται ἐλαχίστη καὶ ἐπαληθεύονται αἱ ἀνισότητες (9,2), (9,3), (9,4).

$α_2$) Διὰ $X = X^1 = (0, 0, 1, 0, 0, 1)$ εἶναι:

$$F(X^1) = \frac{2}{5}$$

Θέτομεν:

$$F(X) \leq \frac{2}{5}$$

καὶ ἔχοντες ὑπ' ὄψιν τὴν (9,4) εὑρίσκομεν:

(9,6) $F_2(X) = 44+6x_1+5x_2-29x_3+10x_4+14x_5-15x_6 \leq 0$

Ἡ $F_2(X)$ διὰ $X = X^1 = (0, 0, 1, 0, 0, 1)$ μηδενίζεται ἐνῷ διὰ πᾶσαν ἄλλην τιμὴν τοῦ X γίνεται θετική, συνεπῶς ἡ ἐλαχίστη τιμὴ τῆς F(X) ὑπὸ τοὺς περιορισμοὺς (9,2), (9,3) καὶ (9,4) εἶναι $\frac{1}{6}$ καὶ λαμβάνει χώραν διὰ $X=X^1=(0, 0, 1, 0, 0, 1)$.

β) Ὑποθέτομεν:

(9,7) $H_3(X)=8-3x_1+2x_3-7x_5<0$

β_1) Θέτομεν:

$$F(X)\leq \frac{2}{5}$$

καὶ ἔχοντες ὑπ' ὄψιν τὴν (9,7) εὑρίσκομεν:

9,8) $F_2(X)=44+6x_1+5x_2-29x_3 \cdot 10x_4+14x_5-15x_6\geq 0$

Τὸ διάνυσμα $X^2=(1, 0, 0, 1, 1, 0)$ καθιστᾷ μεγίστην τὴν (9,8) ὑπὸ τοὺς περιορισμοὺς (9,2), (9,3) καὶ (9,7).

β_2) Διὰ $X=X^2=(1, 0, 0, 1, 1, 0)$ εἶναι:

$$F(X^2)=-7$$

Θέτομεν:

$$F(X)\leq -7$$

καὶ ἔχοντες ὑπ' ὄψιν τὴν (9,7) εὑρίσκομεν:

(9,9) $F_3(X)=68-21x_1+x_2+9x_3+2x_4-49x_5-3x_6\geq 0$

Ἡ ἀνισότης (9,7) ἐπαληθεύεται ὑπὸ τῶν διανυσμάτων $X^*=(1, p_1, 0, p_2, 1, p_3)$, ἔνθα p_1, p_2, p_3 παράμετροι λαμβάνουσαι τιμὰς 0 καὶ 1.

Τὰ διανύσματα X^* ἐπαληθεύουν τὴν (9,2) καὶ ἐξ αὐτῶν τὰ $X^3=(1, 1, 0, 1. 1, 0)$ καὶ $X^2=(1, 0, 0, 1, 1, 0)$ ἐπαληθεύουν τὴν (9,9) καὶ τὸ μὲν X^3 δὲν ἐπαληθεύει τὴν (9,3), τὸ δὲ X καθιστᾷ τὴν (9,9) ἴσην πρὸς μηδέν, συνεπῶς τὸ διάνυσμα $X^2=(1, 0, 0, 1, 1, 0)$ εἶναι τὸ ζητούμενον διάνυσμα, τὸ καθιστῶν τὴν τιμὴν τῆς ψευδο-Boole συναρτήσεως (9,1) ἐλαχίστην καὶ εἶναι $\min E(X)=-7$.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

1. *Γ. Βαρελᾶ:* Γενικὰ Μαθηματικά, τόμος I. ᾿Αφοὶ Σάκκουλα, Θεσσαλονίκη 1970.
2. *A. Charnes* et *W. Cooper:* Programming with Linear Fractional Functionals. Naval Res. Logist. Quart., 9 (1962).
3. *W. Dinkelbach:* Die Maximierung eines Quotienten zweier linear Funktionen unter linearen Nebenbedingungen. Z. Wahrscheinlichkeitstheorie und Verw. Gebiete, 1 (1962).
4. *R. Faure:* Éléments de la recherche opérationnelle. Gauthire - Villars. Paris 1968.
5. *M. Florian* et *P. Robillard:* Programmation hyperbolique en variables bivalentes. Revue française d'informatique et de recherche operationnelle. Dunob, 5e Année, Ianvier 1971.
6. *P. Hammer* et *S. Rudeanu:* Méthodes booléennes en recherche opérationnelle. Dunod, Paris 1970.
7. *J. Kuntzmann:* Algèbre de Boole. Dunod, Paris 1968.
8. *P. Robillard:* (0,1) Hyherbolic Programming Problems. Publication Département d'informatique 19, Université de Montréal, 1970.