ΓΕΩΡΓΙΟΥ ΒΑΡΕΛΑ

ΕΝΑ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΕΛΑΧΙΣΤΟΠΟΙΗΣΕΩΣ ΤΟΥ ΚΟΣΤΟΥΣ ΠΑΡΑΓΩΓΗΣ ΚΑΙ ΜΕΤΑΦΟΡΑΣ ΕΝΟΣ ΠΡΟΪΟΝΤΟΣ

1. ΕΙΣΑΓΩΓΗ

1.1. Εἰς τὸ περιοδικὸν "**Revue française d'automatique informatique recherche operationnelle**" [1] οἱ **A. Alcouffe, M. Engalbert** καὶ **G. Muratet** ἀσχολοῦνται μὲ τὴν μελέτην τῆς ἐλαχιστοποιήσεως τοῦ κόστους παραγωγῆς καὶ μεταφορᾶς ἑνὸς προϊόντος μιᾶς ἐπιχειρήσεως, ἡ ὁποία γνωρίζουσα τὸ ὕψος τῆς ζητήσεως τοῦ προϊόντος καὶ τὴν τοποθεσίαν τῶν διαφόρων καταστημάτων πωλήσεως, ἀντιμετωπίζει τὴν δημιουργίαν περισσοτέρων τῶν ἑνὸς ἐργοστασίων παραγωγῆς.

1.2. Ἀρκετοὶ ἐρευνηταὶ ἔχουν ἀσχοληθῆ μὲ παρόμοια προβλήματα:

α) Οἱ **D. Patink** [2] καὶ **V. Leontief** [3] ἔχουν μελετήσει τὴν περίπτωσιν μιᾶς ἐπιχειρήσεως μὲ περισσότερα ἐργοστάσια παραγωγῆς καὶ προσδιορίζουν τὸν καλύτερον δυνατὸν καταμερισμὸν τῆς παραγωγῆς, γνωρίζοντες τὸ ὕψος τῆς ζητήσεως καὶ μὴ λαμβάνοντες ὑπ' ὄψιν τὸ κόστος μεταφορᾶς.

β) Οἱ **G. Hadley** [4] καὶ **A. Vaszony** [5] ἀπέδειξαν πῶς δύναται νὰ χρησιμοποιηθῆ ὁ ἀλγόριθμος μεταφορᾶς τῶν **Hitchcock-Koopmans** [6] εἰς τὴν περίπτωσιν ὅπου τὸ μέσον κόστος παραγωγῆς εἶναι ἀνεξάρτητον τοῦ ὕψους τῆς παραγωγῆς εἰς κάθε ἐργοστάσιον.

γ) Οἱ **J. Sharp, J. Snyder** καὶ **J. Greéne** [7] ἔχουν μελετήσει τὴν περίπτωσιν, κατὰ τὴν ὁποίαν τὸ κόστος μεταφορᾶς εἶναι γραμμικὴ συνάρτησις τοῦ μήκους μεταξὺ τοῦ ἐργοστασίου καὶ τοῦ καταστήματος πωλήσεως, καὶ τὸ κόστος παραγωγῆς χαρακτηρίζεται ὑπὸ μέσου κόστους συνεχῶς αὐξανομένου.

δ) Οἱ **W. Hirsch, A. Hoffman** καὶ **G. Pantigig** [8] ἐμελέτησαν τὸ πρόβλημα σταθερῶν ἐξόδων συνδεδεμένων μὲ ἀνάλογα ἔξοδα, ἀνεξάρτητα τοῦ ὕψους τῆς παραγωγῆς, ὑπὸ τὸ πρῖσμα ἑνὸς συνόλου γραμμικῶν περιορισμῶν, οἱ ὁποῖοι εἶναι γενικωτέρας μορφῆς ἀπὸ ἐκείνους τοὺς ὁποίους συναντοῦμε εἰς τὰ προβλήματα μεταφορᾶς.

ε) Εἰς τὴν παροῦσαν ἐργασίαν θὰ μελετήσωμεν ἕνα πρόβλημα ἐλαχιστοποιήσεως τοῦ κόστους παραγωγῆς καὶ μεταφορᾶς ἑνὸς προϊόντος, μὲ παράλληλον αὔξησιν τῆς ζητήσεως καὶ συνεπῶς αὔξησιν τῶν ἐργοστασίων παραγωγῆς.

2. ΠΡΟΒΛΗΜΑ 1ον

2.1. Μία ἐπιχείρησις διαθέτει ἀριθμὸν ἐργοστασίων διὰ τὴν παραγωγὴν ἑνὸς προϊόντος. Τὸ παραγόμενον προϊὸν μεταφέρεται εἰς ἀριθμὸν καταστημάτων πωλήσεως. Κάθε ἐργοστάσιον ἔχει ὡρισμένην δυνατότητα παραγωγῆς, καὶ κάθε κατάστημα πωλήσεως δύναται νὰ διαθέσῃ ὡρισμένην ποσότητα τοῦ προϊόντος, οὕτως ὥστε ἡ παραγομένη ὑπὸ τῶν ἐργο-

στασίων ποσότης τοῦ προϊόντος καὶ ἡ διατιθεμένη ὑπὸ τῶν καταστημάτων πωλήσεως νὰ εἶναι ἡ ἰδία. Κάθε ἐργοστάσιον διὰ τὴν λειτουργίαν του ἀπαιτεῖ ἕνα ὡρισμένον σταθερὸν ἡμερήσιον κεφάλαιον καὶ ἕνα κεφάλαιον ἀνάλογον πρὸς τὴν παραγομένην ποσότητα τοῦ προϊόντος. Ἐπίσης, διὰ τὴν μεταφορὰν κάθε μονάδος τοῦ προϊόντος ἐκ τῶν ἐργοστασίων πρὸς τὰ καταστήματα πωλήσεως ἀπαιτοῦνται ὡρισμένα ἔξοδα ἀνάλογα πρὸς τὰς ἀποστάσεις.

Ζητεῖται νὰ εὑρεθῇ τὸ ποσὸν τὸ ὁποῖον θὰ μεταφερθῇ ἀπὸ κάθε ἐργοστάσιον πρὸς τὰ καταστήματα πωλήσεως, εἰς τρόπον ὥστε τὸ ἡμερήσιον κόστος νὰ εἶναι ἐλάχιστον.

Λύσις: Ἔστω:

1. m: Ὁ ἀριθμὸς τῶν ἐργοστασίων παραγωγῆς E_i $(i=1, 2,\dots, m)$ τοῦ προϊόντος Α.
2. q_i : Ἡ ἡμερησία παραγωγὴ τοῦ ἐργοστασίου E_i
3. a_i : Τὸ κόστος μιᾶς μονάδος τοῦ προϊόντος Α εἰς τὸ ἐργοστάσιον E_i.
4. b_i : Τὰ ἡμερήσια σταθερὰ ἔξοδα διὰ τὴν λειτουργίαν τοῦ ἐργοστασίου E_i.
5. n: Ὁ ἀριθμὸς τῶν καταστημάτων πωλήσεως K_j $(j=1, 2,\dots, n)$ τοῦ προϊόντος Α.
6. d_j : Ἡ ἡμερησία ζήτησις τοῦ καταστήματος K_j.
7. C_{ij} : Τὸ κόστος μεταφορᾶς μιᾶς μονάδος τοῦ προϊόντος Α ἐκ τοῦ ἐργοστασίου E_i εἰς τὸ κατάστημα πωλήσεως K_j.
8. X_{ij} : Ἡ ἡμερησία ποσότης τοῦ προϊόντος Α ἡ ὁποία θὰ μεταφερθῇ ἐκ τοῦ ἐργοστασίου E_i εἰς τὸ κατάστημα πωλήσεως K_j.

Οὕτω, ἡ μαθηματικὴ μορφὴ τοῦ προβλήματος εἶναι:
Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐλάχιστον τῆς συναρτήσεως:

$$C_T = \sum_{i=1}^{m} (b_i + a_i q_i) + \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \lambda C_{ij} X_{ij} \tag{2.1.1}$$

ὑπὸ τοὺς περιορισμούς:

$$\sum_{j=1}^{n} X_{ij} = q_i , \qquad \sum_{i=1}^{m} X_{ij} = d_j \tag{2.1.2}$$

$$\sum_{i=1}^{m} q_i = \sum_{j=1}^{n} d_j \tag{2.1.3}$$

Ὅταν ἀκόμη δίδεται ἡ μήτρα τῶν χιλιομετρικῶν ἀποστάσεων μεταξὺ τῶν ἐργοστασίων καὶ τῶν καταστημάτων πωλήσεως:

$E_i \diagdown K_j$	K_1	K_2	. . . . .	K_n	q_i
E_1	C_{11}	C_{12}	. . . . .	C_{1n}	q_i
E_2	C_{21}	C_{22}	. . . . .	C_{2n}	q_2
.	.	.	. . . . .		
.	.	.	. . . . .		
.	.	.	. . . . .		
E_m	C_{m1}	C_{m2}	. . . . .	C_{mn}	q_m
d_j	d_1	d_2	. . . . .	d_n	

(2.1.4)

Τέλος, δίδεται ἡ τιμὴ μεταφορᾶς μιᾶς μονάδος τοῦ προϊόντος Α ἀνὰ χιλιόμετρον· ἔστω α.

Ἐπειδὴ τὸ πρῶτον μέρος $\sum\limits_{i=1}^{m} (b_i + a_i q_i)$ τῆς συναρτήσεως C_T (2.1.1) εἶναι σταθερόν, ἀρκεῖ νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐλάχιστον τοῦ δευτέρου μέρους αὐτῆς, δηλαδὴ ἀρκεῖ νὰ εὑρεθῇ ἡ ἐλαχίστη τιμὴ τῆς συναρτήσεως

$$C = \lambda \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} C_{ij} X_{ij} \qquad (2.1.5)$$

ὑπὸ τοὺς περιορισμοὺς (2.1.2) , (2.1.3) καὶ (2.1.4).

Τὸ ἀνωτέρω πρόβλημα εἶναι ἕνα ἐξισορροπημένον κλασσικὸν πρόβλημα μεταφορᾶς, τὴν λύσιν τοῦ ὁποίου δύναταί τις νὰ εὕρῃ εἰς πλεῖστα συγγράμματα (π.χ. [9], p. 212-223).

2.2. Ἐ φ α ρ μ ο γ ή : Ἐπιχείρησις παραγωγῆς τσιμέντου ἔχει δύο ἐργοστάσια εἰς Ἀθήνας (E_1) καὶ Θεσσαλονίκην (E_2) καὶ ἑπτὰ καταστήματα πωλήσεων εἰς Ἀθήνας (K_1), Θεσσαλονίκην (K_2), Λάρισαν (K_3), Ἡράκλειον (K_4), Καβάλαν (K_5), Ἰωάννινα (K_6) καὶ Τρίπολιν (K_7).

Ἡ ἡμερησία ζήτησις τῶν καταστημάτων πωλήσεως εἶναι ἀντιστοίχως K_1: 5.000, K_2: 3.000, K_3: 2.000, K_4: 500, K_5: 600, K_6: 700 καὶ K_7: 800 τόννοι. Δηλαδὴ σύνολον ζητήσεως 12.600 τόννοι.

Ἡ ἡμερησία παραγωγὴ τῶν ἐργοστασίων εἶναι: E_1: 7.000 καὶ E_2: 5.600 τόννοι. Τὰ ἡμερήσια ἔξοδα λειτουργίας τῶν ἐργοστασίων εἶναι ἀντιστοίχως 500.000 καὶ 400.000 δραχμαὶ καὶ τὸ κόστος ἀνὰ τόννον εἶναι 1.100 καὶ 1.050 δραχμαὶ ἀντιστοίχως.

Τὸ κόστος μεταφορᾶς τοῦ προϊόντος εἶναι 1,25 δραχμαὶ ἀνὰ τόννον-χιλιόμετρον.

Ζητεῖται τὸ ἐλάχιστον κόστος παραγωγῆς καὶ μεταφορᾶς τῆς ἐπιχειρήσεως, ἐφ' ὅσον γνωρίζωμεν τὰς χιλιομετρικὰς ἀποστάσεις τῶν καταστημάτων πωλήσεως ἀπὸ τὰ ἐργοστάσια.

Λύσις

Ἡ μήτρα τῶν χιλιομετρικῶν ἀποστάσεων, τῶν ποσοτήτων παραγωγῆς, ζητήσεως καὶ σταθερῶν ἐξόδων τιμῆς κατὰ μονάδα τοῦ προϊόντος εἶναι:

E_i \ K_j	K_1	K_2	K_3	K_4	K_5	K_6	K_7	q_i	b_i	a_i
E_1	—	520	335	325	685	455	195	7.000	500.000	1.100
E_2	520	—	185	845	165	370	660	6.000	400.000	1.050
d_j	5.000	3.000	2.000	600	600	800	1.000	13.000		

(2.2.1)

Ζητεῖται τὸ ἐλάχιστον τῆς συναρτήσεως:

$$\begin{aligned} C_0 = {} & (500.000+400.000) + (7.000\times 1.100+6.000\times 1.050)+ \\ & +1{,}25\ (0.X_{11}+520\ X_{12}+335\ X_{13}+325\ X_{14}+685\ X_{15}+ \\ & +455\ X_{16}+195\ X_{17}+520\ X_{21}+0\ X_{22}+185\ X_{23}+ \\ & +845\ X_{24}+165\ X_{25}+370\ X_{26}+660\ X_{27}) \end{aligned} \quad (2.2.2)$$

Ὁ ἀλγόριθμος τοῦ προβλήματος μεταφορᾶς μᾶς δίδει τελικὸν ἀποτέλεσμα:

E_i \ K_j	K_1	K_2	K_3	K_4	K_5	K_6	K_7	q_i	b_i	a_i
E_1	0 / 5.000	520	335	325 / 600	685	455 / 400	105 / 1.000	7.000	800.000	1.100
E_2	520	0 / 3.000	185 / 2.000	845	165 / 600	370 / 400	660	6.000	400.000	1.050
d_j	5.000	3.000	2.000	600	600	800	1.000	13.000		

(2.2.3)

Συνεπῶς ἡ ἐλαχίστη τιμὴ τῆς συναρτήσεως C εἶναι:

$$C_0 = 900.000+14.000.000+1{,}25\times 1.185.000=16.381.250 \quad (2.2.4)$$

3. ΠΡΟΒΛΗΜΑ 2ον

3.1 Εἰς τὸ προηγούμενον πρόβλημα (1ον) αὐξάνεται ἡ ζήτησις τῶν καταστημάτων πωλήσεως. Ἡ ἐπιχείρησις ἀντιμετωπίζει τὴν ηὐξημένην *ζήτησιν εἴτε αὐξάνουσα τὴν παραγωγὴν τῶν ὑπαρχόντων ἐργοστασίων, ἐφ' ὅσον τοῦτο εἶναι δυνατόν, ἢ δημιουργοῦσα νέα ἐργοστάσια.*

Ζητεῖται ἡ ἀρίστη λύσις τοῦ ἤδη παρουσιασθέντος προβλήματος, δηλαδὴ ἡ ἐλαχιστοποίησις τοῦ κόστους παραγωγῆς καὶ μεταφορᾶς τοῦ παραγομένου προϊόντος.

Λύσις:

Ἔστω ὅτι ἡ ηὐξημένη ζήτησις τῶν καταστημάτων πωλήσεως δίδεται ὑπὸ τοῦ διανύσματος:

$$\bar{d}=\begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ d_n \end{bmatrix} \tag{3.1.1}$$

καὶ συνεπῶς ἡ ζητουμένη ποσότης εἶναι:

$$\sum_{j=1}^{n} d_j \tag{3.1.2}$$

Ἡ ηὐξημένη ζήτησις δύναται νὰ καλυφθῇ εἴτε διὰ τῆς αὐξήσεως τῆς παραγωγῆς κάθε ἐργοστασίου, εἴτε διὰ τῆς δημιουργίας νέων ἐργοστασίων, εἰς διαφορετικὰς τοποθεσίας, εὑρισκομένας πλησιέστερον εἰς τοὺς τόπους καταναλώσεως καὶ τῶν ὁποίων ὁ ἀριθμὸς δύναται νὰ εἶναι ἀπὸ 1 ἕως K.

Ζητεῖται ἡ ἀριστοποίησις τοῦ κόστους παραγωγῆς καὶ μεταφορᾶς.

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω ἕπεται ὅτι ὁ ἀριθμὸς τῶν ἐργοστασίων παραγωγῆς δύναται νὰ εἶναι ἀπὸ m ἕως $m+K$. Δηλαδὴ ἡ αὔξησις τῆς ζητήσεως τοῦ προϊόντος θὰ καλυφθῇ εἴτε ὑπὸ τῶν ὑπαρχόντων ἐργοστασίων, εἴτε ὑπὸ ἑνὸς νέου, εἴτε ὑπὸ δύο νέων καὶ οὕτω καθ' ἑξῆς, εἴτε ὑπὸ K νέων ἐργοστασίων. Συνεπῶς θὰ ὑπάρχουν

$$\binom{K}{0} + \binom{K}{1} + \binom{K}{2} + \ldots + \binom{K}{K} = 2^K \tag{3.1.3}$$

διάφοροι τρόποι δυνατότητος ἱκανοποιήσεως τῆς ἐπιδιωκομένης αὐξήσεως τῆς ζητήσεως.

Δι' ἑκάστην ἐκ τῶν δυνατοτήτων αὐτῶν ὑπάρχει ἓν ἐλάχιστον κόστος παραγωγῆς καὶ μεταφορᾶς τοῦ προϊόντος. Ἐὰν κάθε ἕνα ἀπὸ τὰ εὑρεθέντα 2^K ἐλάχιστα καλέσωμεν σχετικὸν ἐλάχιστον, ἀρκεῖ νὰ ἀναζητήσωμεν τὸ μικρότερον μεταξὺ αὐτῶν, τὸ ὁποῖον καὶ θὰ μᾶς δώσῃ τὴν ἐπιθυμητὴν λύσιν τοῦ ὅλου προβλήματος.

Οὕτω, τὸ μαθηματικὸν μοντέλο τοῦ προβλήματος θὰ εἶναι: Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐλάχιστον τῆς συναρτήσεως:

$$C_\lambda = \sum_{i=1}^{m+\lambda} (b_i + a_i q_i) + \sum_{i=1}^{m+\lambda} \sum_{j=1}^{n} C_{ij} X_{ij} \quad (\lambda = 0 \text{ ἕως } K) \qquad (3.1.4)$$

ὑπὸ τοὺς περιορισμούς·

$$\sum_{j=1}^{n} X_{ij} = q_i\,, \quad \sum_{i=1}^{m+\lambda} X_{ij} = d_j \qquad (3.1.5)$$

$$\sum_{i=1}^{m+\lambda} q_i = \sum_{j=1}^{n} d_j \qquad (3.1.6)$$

ὅταν ἀκόμη δίδεται ἡ μήτρα τῶν χιλιομετρικῶν ἀποστάσεων μεταξὺ τῶν ἐργοστασίων καὶ τῶν καταστημάτων πωλήσεως.

E_i \ K_j	K_1	K_2						K_n	q_i
E_1	C_{11}	C_{12}	.	.	.	.	.	C_{1n}	q_1
E_2	C_{21}	C_{22}	.	.	.	.	.	C_{2n}	q_2
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
E_{m+k}	$C_{m+k,1}$	$C_{m+k,2}$	.	.	.	.	.	$C_{m+k,n}$	q_{m+k}
d_j	d_1	d_2	.	.	.	.	.	d_n	

(3.1.7)

Ἐπειδὴ τὸ πρῶτον μέρος τῆς συναρτήσεως (3.1.4)

$$\sum_{i=1}^{m+\lambda} (b_i + a_i q_i) \qquad (3.1.8)$$

εἶναι σταθερὰ ποσότης, ἀρκεῖ νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐλάχιστον τοῦ δευτέρου μέρους αὐτῆς, δηλαδὴ ἀρκεῖ νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐλάχιστον τῶν συναρτήσεων.

$$C=\sum_{i=1}^{m+\lambda}\sum_{j=1}^{n} C_{ij}X_{ij}\ (\lambda=0, 1, \ldots, k) \tag{3.1.9}$$

ὑπὸ τοὺς περιορισμοὺς (3.1.5), (3.1.6).

3.2. Ἐφαρμογή: Ἡ εἰς τὴν πρώτην ἐφαρμογὴν ἀναφερθεῖσα ἐπιχείρησις παραγωγῆς τσιμέντου ἔχει αὔξησιν τῆς ζητήσεως τῶν καταστημάτων πωλήσεως καὶ ἡ τελικὴ ζήτησις δίδεται ὑπὸ τοῦ διανύσματος

$$\bar{d}=\begin{bmatrix} 9.000 \\ 6.000 \\ 4.000 \\ 1.000 \\ 1.500 \\ 1.500 \\ 2.000 \end{bmatrix} \tag{3.2.1}$$

Τὴν αὔξησιν αὐτὴν ἡ ἐπιχείρησις δύναται νὰ πραγματοποιήσῃ ὑπὸ τὰς κάτωθι τέσσαρας περιπτώσεις:

Περίπτωσις 1η: διὰ τῆς αὐξήσεως τῆς παραγωγῆς τῶν ὑπαρχόντων ἐργοστασίων E_1, E_2.

Περίπτωσις 2α: διὰ τῆς προσθήκης ἱδρύσεως εἰς Λάρισαν τοῦ ἐργοστασίου E_3, ὁπότε ἡ ὅλη ζήτησις θὰ καλυφθῇ ὑπὸ τῶν ἐργοστασίων E_1, E_2, E_3.

Περίπτωσις 3η: διὰ τῆς προσθήκης ἱδρύσεως εἰς Κόρινθον τοῦ ἐργοστασίου E_4, ὁπότε ἡ ὅλη ζήτησις θὰ καλυφθῇ ὑπὸ τῶν ἐργοστασίων E_1, E_2, E_4, καὶ τέλος

Περίπτωσις 4η: διὰ τῆς προσθήκης τῶν ἐργοστασίων E_3 καὶ E_4, ὁπότε ἡ ὅλη ζήτησις θὰ καλυφθῇ ὑπὸ τῶν ἐργοστασίων E_1, E_2, E_3, E_4.

Ἡ μήτρα τῶν χιλιομετρικῶν ἀποστάσεων εἶναι:

E_i \ K_j	K_1	K_2	K_3	K_4	K_5	K_6	K_7
E_1	–	520	335	325	685	455	195
E_2	520	–	185	845	165	370	660
E_3	335	185	–	660	350	215	470
E_4	80	600	415	408	765	[illegible]70	110

Λύσις:

Περίπτωσις 1η: Αὔξησις τῆς παραγωγῆς τῶν ἐργοστασίων E_1, E_2

Ἡ μήτρα τῶν χιλιομετρικῶν ἀποστάσεων, τῶν ποσοτήτων παραγωγῆς των ἐργοστασίων, τῆς ζητήσεως τῶν καταστημάτων πωλήσεων, τῶν σταθερῶν ἐξόδων καὶ τῆς τιμῆς κατὰ μονάδα τοῦ προϊόντος εἶναι:

E_i \ K_j	K_1	K_2	K_3	K_4	K_5	K_6	K_7	q_i	b_i	a_i
E_1	0	520	335	325	685	455	195	13.000	900.000	1.100
E_2	520	0	185	845	165	370	660	12.000	750.000	1.050
d_j	9.000	6.000	4.000	1.000	1.500	1.500	2.000	25.000		

Ζητεῖται τὸ ἐλάχιστον τῆς συναρτήσεως:

$$\begin{aligned} C_1= & [900.000+750.000] + [13.000\times 1.100+12.000\times 1.050]+ \\ & +1,25[OX_{11}+520X_{12}+335X_{13}+325X_{14}+685X_{15}+ \\ & +455X_{16}+195X_{17}+520X_{21}+OX_{22}+185X_{23}+ \\ & +845X_{24}+165X_{25}+370X_{26}+660_{27}] \end{aligned} \qquad (3.2.2)$$

Ὁ ἀλγόριθμος τοῦ προβλήματος μεταφορᾶς μᾶς δίδει τελικὸν ἀποτέλεσμα

E_i \ K_j	K_1	K_2	K_3	K_4	K_5	K_6	K_7	q_i	b_i	a_i
E_1	0 / 9.000	520 /	335 /	325 / 1.000	685 /	455 / 1.000	195 / 2.000	13.000	900.000	1.100
E_2	520 /	0 / 6.000	185 / 4.000	845 /	165 / 1500	375 / 500	660 /	12.000	750.000	1.050
d_j	9.000	6.000	4.000	1.000	1.500	1.500	2.000	25.000		

Συνεπῶς ἡ ἐλαχίστη τιμὴ τῆς συναρτήσεως C_1 εἶναι

$$C_1= 1.650.000+26.900.000+1,25\times 2.342.500 = 31.478.125$$

Περίπτωσις 2α: Ἵδρυσις τοῦ ἐργοστασίου E_3 διὰ τὴν κάλυψιν τῆς ζητήσεως

Ἡ μήτρα τῶν χιλιομετρικῶν ἀποστάσεων, τῶν ποσοτήτων παραγωγῆς τῶν ἐργοστασίων, τῆς ζητήσεως τῶν καταστημάτων πωλήσεων, τῶν σταθερῶν ἐξόδων καὶ τῆς τιμῆς κατὰ μονάδα τοῦ προϊόντος εἶναι:

E_i \ K_j	K_1	K_2	K_3	K_4	K_5	K_6	K_7	q_i	b_i	a_i
E_1	0	520	335	325	685	455	195	7.000	500.000	1.100
E_2	520	0	185	845	105	370	660	6.000	400.000	1.050
E_3	335	185	0	660	350	215	470	12.000	700.000	1.000
d_i	9.000	6.000	4.000	1.000	1.500	1.500	2.000	25.000		

Ζητεῖται τὸ ἐλάχιστον τῆς συναρτήσεως

$$\begin{aligned} C_2 = {} & [500.000+400.000+700.000] + [7.000\times 1.100+6.000\times \\ & \times 1.050+12.000\times 1.000] + 1{,}125[OX_{11}+520X_{12}+335X_{13}+ \\ & +325X_{14}+685X_{15}+455X_{16} + 195X_{17}+520X_{21}+OX_{22}+ \\ & +185X_{23}+845X_{24}+105X_{25} + 370X_{26}+660X_{27}+335X_{31}+ \\ & +185X_{32}+OX_{33}+660X_{34} + 350X_{35}+215X_{36}+470X_{37}\} \end{aligned} \tag{3.2.3}$$

Ὁ ἀλγόριθμος τοῦ προβλήματος μεταφορᾶς μᾶς δίδει τελικὸν ἀποτέλεσμα:

E_i \ K_j	*K_1*	*K_2*	*K_3*	*K_4*	*K_5*	*K_6*	*K_7*	*q_i*	*b_i*	*a_i*
E_1	0 / 7.000	520	335	325	685	455	195	7.000	500.000	1.100
E_2	520	0 / 6.000	185	845	105	370	660	6.000	400.000	1.050
E_3	335 / 2.000	185	0 / 4.000	660 / 1.000	350 / 1.500	215 / 1.500	470 / 2.000	12.000	700.000	1.000
d_j	9.000	6.000	4.000	1.000	1.500	1.500	2.000	25.000		

Συνεπῶς ἡ ἐλαχίστη τιμὴ τῆς συναρτήσεως C_2 εἶναι:

$$C_2 = 1.600.000+26.000.000+1{,}25\times 3.117.500 = 31.496.875$$

Περίπτωσις 3η: Ἵδρυσις τοῦ ἐργοστασίου E_4 διὰ τὴν κάλυψιν τῆς ζητήσεως

Ἡ μήτρα τῶν χιλιομετρικῶν ἀποστάσεων, τῆς παραγωγῆς τῶν ἐργοστασίων E_1, E_2, E_4, τῆς ζητήσεως τῶν καταστημάτων πωλήσεως, τῶν σταθερῶν ἡμερησίων ἐξόδων καὶ τῆς τιμῆς κατὰ μονάδα τοῦ προϊόντος εἶναι:

E_i \ K_j	K_1	K_2	K_3	K_4	K_5	K_6	K_7	q_i	b_i	a_i
E_1	0	520	335	325	685	455	195	7.000	500.000	1.100
E_2	520	0	185	845	105	370	660	6.000	400.000	1.050
E_3	80	600	415	406	765	770	110	12.000	800.000	1.000
d_j	9.000	6.000	4.000	1.000	1.500	1.500	2.000			

Ζητεῖται τὸ ἐλάχιστον τῆς συναρτήσεως:

$$C_3= [500.000+400.000+800.000] + [7.000\times 1.100+ +6.000\times 1.050+12.000\times 1.000] + [0X_{11}+520X_{12}+ +335X_{13}+325X_{14}+685X_{15}+455X_{16}+195X_{17}+520X_{21}+0X_{22}+ +185X_{23}+845X_{24}+105X_{25}+370X_{26}+660X_{27}+80X_{31}+600X_{32}+ +415X_{33}+406\ddot{X}\&+765X_{35}+770X_{36}+110X_{37}] \qquad (3.2.4)$$

Ὁ ἀλγόριθμος τοῦ προβλήματος δίδει ὡς τελικὸν ἀποτέλεσμα τὸ ἑξῆς:

E_i \ K_j	K_1	K_2	K_3	K_4	K_5	K_6	K_7	q_i	b_i	a_i
E_i	0 / 6.000	520	335	325 / 1.000	685	455	195	7.000	500.000	1.100
E_2	520	0 / 6.000	185	845	165	370	660	6.000	400.000	1.050
E_3	80 / 3.000	600	415 / 4.000	406	765 / 1.500	370 / 1.500	110 / 2.000	12.000	800.000	1.000
d_j	9.000	6.000	4.000	1.000	1.500	1.500	2.000			

Συνεπῶς ἡ ἐλαχίστη τιμὴ τῆς συναρτήσεως C_3 εἶναι

$$C_3= 1.700.000+26.000.000+1,25\times 1,25\times 4.147.500 = 32.884.375$$

Περίπτωσις 4η: Ἵδρυσις τῶν ἐργοστασίων E_3 καὶ E_4 διὰ τὴν κάλυψιν τῆς ζητήσεως

Ἡ μήτρα τῶν χιλιομετρικῶν ἀποστάσεων, τῆς παραγωγῆς τῶν ἐργοστασίων E_1, E_2, E_3, E_4, τῆς ζητήσεως τῶν καταστημάτων πωλήσεως, τῶν σταθερῶν ἡμερησίων ἐξόδων καὶ τῆς τιμῆς κατὰ μονάδα τοῦ προϊόντος εἶναι:

E_i \ K_j	K_1	K_2	K_3	K_4	K_5	K_6	K_7	q_i	b_i	a_i
E_1	0	520	335	325	685	455	195	7.000	500.000	1.100
E_2	520	0	185	845	165	370	660	6.000	400.000	1.050
E_3	335	185	0	660	350	215	470	7.000	450.000	1.000
E_4	80	600	415	406	765	370	110	5.000	350.000	1.000
d_j	9.000	6.000	4.000	1.000	1.500	1.500	2.000	25.000		

Ζητεῖται τὸ ἐλάχιστον τῆς συναρτήσεως:

$$\begin{aligned}C_4= {} & [500.000+400.000+450.000+350.000] + [7.000\times \\ & \times 1.100+6.000\times 1.050+7.000\times 1.000+5.000\times 1.000] + \\ & [OX_{11}+520X_{12}+335X_{13} + 325X_{14}+685X_{15}+455X_{16}+ \\ & +195X_{17}+520X_{21} +OX_{22}+ 185X_{23}+845X_{24}+165X_{25}+ \\ & +370X_{26}+660X_{27}+335X_{31}+ 185X_{32}+OX_{33}++660X_{34}+ \\ & +350X_{35} + 215X_{36} + 470X_{37} + 80X_{41} + 600X_{42} + 415X_{43} + \\ & +406X_{44}+765X_{45}+370X_{46}+110X_{47}]\end{aligned} \qquad (3.2.5)$$

Ὁ ἀλγόριθμος τοῦ προβλήματος δίδει ὡς τελικὸν ἀποτέλεσμα τὸ ἑξῆς:

E_i \ K_j	K_1	K_2	K_3	K_4	K_5	K_6	K_7	q_i	b_i	a_i
	0 / 6.000	520	335	325 / 1.000	685	455	195	7.000	500.000	1.100
E_2	520	0 / 6.000	185	845	165	370	660	6.000	400.000	1.050
E_3	335	185	0 / 4.000	660	350	215 / 1.500	470 / 1.500	7.000	450.000	1.000
E_4	80 / 3.000	600	415	406	765	370	110	5.000	350.000	1.000
d_j	9.000	6.000	4.000	1.000	1.500	1.500	2.000	25.000	1.700.000	

Συνεπῶς ἡ ἐλαχίστη τιμὴ τῆς συναρτήσεως C_4 εἶναι:

$$C_4 = 1.700.000+26.000.000+1,25\times 1.602.500 = 29.703.125$$

Σ υ μ π έ ρ α σ μ α : Συγκρίνοντες τὰς εὑρεθείσας ἐλαχίστας τιμὰς τῶν οἰκονομικῶν συναρτήσεων C_1, C_2, C_3, C_4, παρατηροῦμε ὅτι ἡ ἐλαχίστη ἐξ αὐτῶν εἶναι ἡ C_4. Συνεπῶς, εἰς τὴν ἐπιχείρησιν συμφέρει ἡ ἵδρυσις δύο ἀκόμη νέων ἐργοστασίων παρὰ ἡ αὔξησις τῆς παραγωγῆς τῶν ἤδη ὑφισταμένων.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

[1] Revue française d'automatique in formatique recherche operationnelle (9^{e} année, octobre 1975, V. 3, p. 41 à 55).

[2] *D. Patinkin,* Note on the allocation of output, Quater. J. Econ. août 1947, p. 651-657 et Multiple-plant firms, cartels and imperfect Competition, Quater. J. Econ., février 1947, p. 173-205.

[3] *V. Leontief,* Multiple-plant firms: comment, Quater. J. Econ., août 1947, p. 650-651.

[4] *G. Hadley,* Linear programming, Addison-Wesley, Reading, Mass., 1962.

[5] *A. Vaszony,* Scientific programming in business and industry, John Wiley, New York, 1958.

[6] *F.L. Hitchcock,* The distribution of a product from several sources to numerous localities, J. Math. Phys., 1941, p. 224-250.

[7] *J.F. Sharp, J.C. Snyder* et *J.H. Greene,* A decomposition algorithm for solving the multifacility production-transportation problem with non-linear production costs, Econometrica, Mai 1970, p. 490-506.

[8] *G.B. Dantzig* et *W.M. Hirsch,* The fixed charge problem, Research Memorandum, the Rand Corporation, 1er décembre 1954; *W.M. Hirsch* et *A.J. Hoffman, Extreme varieties, concave functions, and the fixed charge problem, Comm. pure appl. Math.,* 1961, p. 355-369.

[9] *M. Simonnard,* Programmation linéaire Dunod, Paris, chap. 11, p. 224-252.