ΜΙΑ ΓΛΩΣΣΑ ΕΚΦΩΝΗΣΗΣ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΤΥΠΩΝ

Α. ΓΑΓΑΤΣΗΣ

Εισαγωγή

Η υιοθέτηση της μαθηματικής γλώσσας, της οποίας θα μελετήσουμε μερικά στοιχεία σ' αυτό το άρθρο, είναι η αιτία μεγάλων προόδων. Η ιστορία των αλγεβρικών συμβολισμών υποστηρίζει αυτή την άποψη. Πραγματικά, όσο οι μαθηματικοί αισθάνονταν την ανάγκη να παραστήσουν γεωμετρικά το γινόμενο τριών αριθμών μ' ένα παραλληλεπίπεδο, η ύψωση στην τετάρτη δύναμη ήταν μια παράτολμη πράξη. Κατά τη διάρκεια μιας αργής εξέλιξης, από τον Διόφαντο (3ος αιώνας) ως τον Viéte (16ος αιώνας) και τον Descartes, αναπτύσσεται ένας αλγεβρικός συμβολισμός όπου οι άγνωστοι και τα δεδομένα παριστάνονται με γράμματα και οι πράξεις προσδιορίζονται με συνήθη σημεία.

Μπορούμε έτσι να θεωρήσουμε την πρόταση:

«Το γινόμενο της κυβικής ρίζας ενός θετικού αριθμού με την έκτη ρίζα του είναι ίσο με την τετραγωνική ρίζα του αριθμού».

Αυτό το αποτέλεσμα που είναι πολύ δύσκολο να προβλεφτεί με τη βοήθεια των ριζικών ή όταν η εκφώνηση είναι στη φυσική γλώσσα, παίρνεται αυτόματα όταν υιοθετούμε τους κανόνες των κλασματικών δυνάμεων

$$(x^{1/3} \cdot x^{1/6} = x^{\frac{1}{3}+\frac{1}{6}} = x^{1/2})$$

Όπως έγραψε ο Pavlov:

«Η γλώσσα στον ανώτερό της βαθμό δημιουργεί την επιστήμη».

Όμως αυτή η μαθηματική γλώσσα που τόσο συνέβαλε στην πρόοδο της ίδιας της μαθηματικής επιστήμης, δημιουργεί πολλά προβλήματα κατανόησης στους μαθητές. Ένα από τα προβλήματα αυτά αφορά την προφορική *ανάγνωση* αυτής της γλώσσας. Πράγματι οι καθηγητές των μαθηματικών παραπονούνται συχνά ότι οι μαθητές τους που γνωρίζουν να προσθέτουν, ν' αφαιρούν, να πολλαπλασιάζουν και να διαιρούν είναι ανίκανοι να λύνουν προβλήματα που περιέχουν αυτές τις πράξεις. Δεχόμαστε μερικές φορές ότι η ανικανότητα αυτή οφείλεται στο γεγονός ότι δεν γνωρίζουν να διαβάζουν σωστά τις εκφωνήσεις των προβλημάτων σ' αυτό τον τομέα. Τα Μαθηματικά δεν έχουν μόνον ένα συμβολισμό γνήσια δικό τους αλλά επίσης μια σύνταξη τελείως ιδιαίτερη.

Υπάρχουν πολλές ομοιότητες ανάμεσα στα σχολικά βιβλία που είναι γραμμένα σε συνηθισμένα ελληνικά και στα βιβλία των μαθηματικών. Αυτές οι ομοιότητες οφείλονται στο γεγονός ότι η λογικο-μαθηματική γλώσσα από τη μια πλευρά και η φυσική γλώσσα από την άλλη πλευρά είναι δυϊκές εκδηλώσεις της νόησης[1]. Ο όρος της δυϊκότητας παραπέμπει σε δύο είδη γεγονότων:

α) λογική γλώσσα και φυσική γλώσσα είναι αχώριστα συνδεδεμένες, η μια δεν μπορεί να θεωρηθεί χωρίς την άλλη,
β) είναι παρόλα αυτά ειδικές η μία σε σχέση με την άλλη, πράγμα που σημαίνει ότι δεν θα μπορούσαμε να μετατρέψουμε τη λογική στη γλώσσα ούτε τη γλώσσα στη λογική.

Έτσι συγκεντρώνοντας την προσοχή μας στην ανάγνωση των μαθηματικών κειμένων, δεν μπορούμε ν' αγνοήσουμε την ανάγνωση του συνηθισμένου πεζού λόγου. Ορισμένες δυσκολίες δεν συνδέονται με τον μαθηματικό χαρακτήρα του κειμένου, αλλά με την έλλειψη εξάσκησης στην ανάγνωση γενικότερα. Από την άλλη πλευρά, υπάρχει ένας αριθμός διαφορών που κάνει αναγκαία την απόκτηση από τους μαθητές συμπληρωματικών ικανοτήτων, γνήσιων για την ανάγνωση των μαθηματικών κειμένων.

Οι διαφορές ανάμεσα στα κείμενα που είναι γραμμένα στη φυσική γλώσσα και στα μαθηματικά κείμενα αφορούν:

α) τα γράμματα, τους αριθμούς και τα σύμβολα (χρησιμοποιούνται ειδικά στα μαθηματικά κείμενα)
β) το λεξιλόγιο
γ) τη γραμματική και τη σύνταξη
δ) τον κανόνα του παιχνιδιού (τον τρόπο ανάγνωσης)
ε) την ποικιλία των «μορφών» που συνθέτουν ένα μαθηματικό κείμενο.

Από αυτές τις διαφορές θα αναφερθούμε μόνο στην πρώτη και στα προβλήματα ανάγνωσης που οφείλονται σ' αυτή.

Τέλος θ' αναφερθούμε στα προβλήματα εκφώνησης (προφορικής ανάγνωσης) των μαθηματικών τύπων.

1. Η χρήση των γραμμάτων, αριθμών και συμβόλων στα μαθηματικά κείμενα

Κατά τη διάρκεια μιας ανάγνωσης ενός μαθηματικού κειμένου οι μαθητές πρέπει ν' απαντήσουν στο συνηθισμένο αλφάβητο, στα σύμβολα

1. Grize J.B., Langues logico-mathématiques et langues naturelles, *Revue française de pédagogie*, 1973, No 23.

και στους αριθμούς. *Τα γράμματα* χρησιμοποιούνται ειδικά στα μαθηματικά κείμενα με πολλούς τρόπους:[2,3]

Πρώτον παριστάνουν (μαθηματικά) αντικείμενα για παράδειγμα σημεία (Α,Β,...), ευθείες (ΑΒ, ΑΓ,...), γεωμετρικά σχήματα (ΑΒΓ,...) ή σταθερές (π, e,...).

Δεύτερο χρησιμοποιούνται για σύμβολα σχέσεων ή αναφορικά σύμβολα *(X, ∪, ∩,...) σύμβολα συναρτήσεων (f, p,...) ή συντομεύσεις (Α, Ψ,...).*

Τρίτο χρησιμοποιούνται σαν μεταβλητές (η έννοια της μεταβλητής δημιουργεί πολλά προβλήματα κατανόησης στους μαθητές Γυμνασίου αλλά και Λυκείου).

Τέταρτο παριστάνουν ολόκληρες προτάσεις στη Λογική (p, q...).

Δεν πρέπει να θεωρήσουμε το συντομευτικό σύμβολο μόνο σαν ένα «στενογράφημα» που προορίζεται για εξοικονόμηση προσπάθειας γραψίματος: μερικές φορές οι επινοημένοι συμβολισμοί μας επιτρέπουν να συλλογιόμαστε «οικονομικά» πάνω σε πολύπλοκα σύμβολα.

Είναι πολύ σημαντικό να σκεφτούμε πάνω στη μεγάλη πρόοδο που αποτελεί η χρήση ενός μόνο γράμματος f για να παραστήσουμε μια συνάρτηση, ενώ μια πιο μεγάλη επεξήγηση θάκανε αναγκαίους, ενδεχόμενα, πολλούς τόμους μιας συλλογής αριθμητικών πινάκων[4]. Ιδιαίτερα, χρησιμοποιούμε συχνά ένα μόνο γράμμα για να παραστήσουμε ένα ρητό αριθμό, ένα μιγαδικό αριθμό, ένα διάνυσμα, έναν πίνακα, κ.λπ... Μετά τη διευκρίνιση των κανόνων των υπολογισμών που διέπουν τη χρήση του καθενός απ' αυτά τα αντικείμενα, ενεργούμε απ' ευθείας πάνω στα σύντομα σύμβολα, των *οποίων δεν θα εξηγήσουμε τα συνθετικά στοιχεία παρά μόνο σ' εξαιρετικές* περιπτώσεις.

Υπάρχουν επίσης κι άλλα μαθηματικά σύμβολα εξαιτίας των διαφορετικών χαρακτήρων τύπωσης ή γραφής. Είναι απλά σύμβολα όπως: +, -, =..., ή πιο ειδικά σύμβολα όπως: $\sqrt{}$, $\sum$, $\int$,... Μερικές από τις πιο σημαντικές ιδέες των μαθηματικών εκφράζονται με τη βοήθεια αυτής της ποικιλίας των συμβόλων που κατά συνέπεια πρέπει να κατανοηθούν από τους μαθητές.

Αναφέρουμε στη συνέχεια τη χρησιμοποίηση των *αριθμών* στα μαθηματικά κείμενα, που συχνά έχουν μια ιδιαίτερη σημασία για την ανάγνωση. Ας πάρουμε για παράδειγμα τη φράση:

«Η φίλη μου μένει στο διαμέρισμα Νο 3».

Είναι πιθανό το «ξέχασμα» του αριθμού 3 να μην είναι πολύ σημαντικό

2. Lamb C.E., *Language, reading and mathematics.* A paper presented to the Second Conference on *Language and Language Acquisition*, Mons, Belgium, September 1980.

3. Γαγάτσης Α., *Διδακτική των μαθηματικών.* Η εκτίμηση της κατανόησης των κειμένων με ιδιαίτερη αναφορά στα μαθηματικά κείμενα, Θεσσαλονίκη 1984, (υπό επανέκδοση).

4. Glaeser, G., *Mathématiques pour l'élève professeur*, Hermann, Paris, 1971.

για την κατανόηση ολόκληρης της ιστορίας. Όμως αν ξεχάσουμε να σημειώσουμε τον αριθμό 3 στο παρακάτω πρόβλημα, θα είναι ένα λάθος που «στοιχίζει».

«Το παιδί αγόρασε 3 ψωμιά προς 20 δρχ. το ένα. Πόσα ξόδεψε;»

Επιπλέον στα μαθηματικά κείμενα οι αριθμοί μπορούν να χρησιμοποιούνται με περισσότερους τρόπους. Για παράδειγμα στην έκφραση 10^2 ο αριθμός 2 φανερώνει μια μαθηματική πράξη (10×10), όπως και στην έκφραση $\sqrt[4]{16}$ ο αριθμός 4 φανερώνει μια αριθμητική πράξη. Έτσι ο ίδιος αριθμός μπορεί να έχει ένα διαφορετικό ρόλο σε διαφορετικούς μαθηματικούς τύπους ή μαθηματικές εκφράσεις.

Αυτό το σύνολο των «πρωταρχικών» συμβόλων (γράμματα, αριθμοί και άλλοι χαρακτήρες) αυξάνει χρησιμοποιώντας διάφορα «σύνθετα σημεία». Για παράδειγμα οι συνδυασμοί X', X'', $\hat{X}$, $\bar{X}$, $\dot{X}$, $\ddot{X}$... που εμφανίζονται σε διάφορα μαθηματικά περιεχόμενα όπως και τα γράμματα.

Γράφοντας μια σειρά χαρακτήρων (με δικαίωμα επανάληψης του ίδιου χαρακτήρα) πάνω σε μια οριζόντια γραμμή από τ' αριστερά στα δεξιά παίρνουμε τις *«συνενώσεις»* (assemblages) ή *μαθηματικούς τύπους*. Π.χ. $\alpha+\beta$.

Στα μαθηματικά χρησιμοποιούμε επίσης μη οριζόντιες συνενώσεις (μαθηματικοί τύποι που η γραφή τους δεν είναι μια ευθεία γραμμή).

Π.χ. τα κλάσματα $\frac{\alpha}{\beta}$

συνδυασμοί C_n^p $\binom{n}{p}$

δυνάμεις 2^3

πίνακες $\begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{pmatrix}$

διαγράμματα κ.λπ.

Οι μαθητές πρέπει να γνωρίζουν όχι μόνον αν ένας μαθηματικός τύπος είναι σωστός γραμματικά, αλλά επιπλέον πρέπει ν' αναγνωρίζουν αν είναι σωστός από σημαντική άποψη, από λογική κ.λπ. Για παράδειγμα οι παρακάτω τύποι δεν είναι γραμματικά σωστοί:

$$\alpha + = = b, \qquad (\alpha+[b+c)+d], \qquad \int_0^1 f(t)$$

Αντίθετα οι παρακάτω μαθηματικοί τύποι είναι γραμματικά σωστοί αλλά μπορεί να τους γίνει κριτική από σημαντική και λογική άποψη.

$$\int_{-\infty}^{\infty} t\mathrm{d}t, \quad \frac{0}{0}, \quad \frac{1}{0}, \quad \sqrt{i}, \quad \{ \sum^{\infty} \frac{1}{n} = 1.000 \}$$

Τέλος αξίζει ν' αναφέρουμε την ιδιάζουσα χρήση των *παρενθέσεων* στα μαθηματικά κείμενα. Όταν αντικαθιστούμε μια σύνθετη συνένωση (τύπο) σε μια μεταβλητή, είναι αναγκαίο να εισάγουμε τη συνένωση που αντικαθιστούμε ανάμεσα σε παρενθέσεις. Έτσι όταν αντικαθιστούμε α+β στη μεταβλητή X του ημX, γράφουμε ημ(α+β) και όχι ημα+β.

Σε περίπτωση απουσίας των παρενθέσεων ορισμένες εκφράσεις θα ήταν διφορούμενες, αν δεν υπήρχαν οι κανόνες προτεραιότητας για να τις διορθώσουν: διαφορετικά $3+4\times 5$ θα μπορούσε να σημαίνει $(3+4)\times 5 = 35$ ή $3+4(\times 5) = 23$.

Οι μαθητές θα πρέπει να γνωρίζουν τους κανόνες προτεραιότητας, τους κανόνες ανάγνωσης ή γραφής και να τους εφαρμόζουν στις πράξεις ή στις μαθηματικές εκφράσεις.

Τα άλλα ιδιαίτερα χαρακτηριστικά των μαθηματικών κειμένων τ' αναφέρουμε σύντομα γιατί δεν δημιουργούν πρόβλημα σε σχέση με την προφορική ανάγνωση των κειμένων. Έτσι:

Το μαθηματικό *λεξιλόγιο* είναι πιο σύντομο, πιο ακριβές από οποιαδήποτε άλλη επιστήμη.

Η σύνταξη των μαθηματικών κειμένων είναι πολύ ιδιαίτερη γιατί περιέχουν ένα μίγμα μαθηματικών προτάσεων και προτάσεων γραμμένων στη φυσική γλώσσα.

Ο «κανόνας του παιχνιδιού» είναι διαφορετικός για τα λογοτεχνικά και τα μαθηματικά κείμενα. Πράγματι η ανάγνωση ενός μυθιστορήματος γίνεται συνήθως με γραμμικό τρόπο, ενώ η «σωστή» ανάγνωση στα μαθηματικά (π.χ. μιας μαθηματικής απόδειξης) γίνεται με *διαδοχικές προσεγγίσεις*[5].

Τέλος ένα από τα πιο σημαντικά χαρακτηριστικά ενός μαθηματικού κειμένου είναι η *ποικιλία των εκφωνήσεων* που το συνθέτουν. Μπορούμε να διακρίνουμε τρεις κύριες κατηγορίες:

— αυτές που οροθετούν το πεδίο δουλειάς ορίζοντας ένα ή περισσότερα μαθηματικά αντικείμενα (ορισμοί),
— αυτές που ανακοινώνουν ιδιότητες των αντικειμένων που ορίστηκαν (προτάσεις, θεωρήματα, πορίσματα),
— αυτές που έχουν μια αποδεικτική λειτουργία (αποδείξεις).

Η σημασία αυτής της ποικιλίας είναι τέτοια ώστε αν ο αναγνώστης δεν την παίρνει υπόψη του κατά τη διάρκεια της ανάγνωσης, κινδυνεύει να μην καταλάβει το κείμενο[6].

5. Glaeser G., *Analyse de la transmission. Le livre de Mathématiques et sa lecture*. Cours de 3e cycle. Université Louis Pasteur. Strasbourg, 1976.

6. Rasolofoniaina I., *Conditions d'apprentissage mathématique par la lecture*. Thèse de 3e cycle. Strasbourg, Janvier 1973.

2. Η παραγωγή μιας προφορικής γλώσσας

Η χρησιμοποίηση των γραμμάτων, των αριθμών και των συμβόλων στα μαθηματικά κείμενα που εξετάσαμε στην πρώτη παράγραφο θέτει ένα πρόβλημα: *τη χρησιμοποίηση σε μια προφορική επικοινωνία της γλώσσας των μαθηματικών κειμένων.* Ας πάρουμε για παράδειγμα τη φράση:

«Θα εξετάσουμε τώρα πώς συνδέονται μεταξύ τους τα τετράπλευρα, τα παραλληλόγραμμα, τα ορθογώνια, οι ρόμβοι και τα τετράγωνα»[7].

Σ' αυτό το παράδειγμα κάθε λέξη που προφέρεται στην ανάγνωση της φράσης μπορεί να παραχθεί αποδίδοντας τα φωνήματα (θόρυβοι) στα γραφήματα (γράμματα ή συνδυασμοί γραμμάτων), όπως αυτό γίνεται στη φυσική γλώσσα.

Αλλά γενικά δεν υπάρχει μια *αμφιμονότιμη αντιστοιχία φωνήματος - γραφήματος* ανάμεσα στα σύμβολα και στις μιλούμενες λέξεις, π.χ. τα *σύμβολα* $<$, $\sqrt{}$. *Αυτό σημαίνει ότι δεν υπάρχουν μιλούμενες λέξεις που να* μπορούν να συνδεθούν στα σύμβολα. Κι αυτό σημαίνει ότι το γραμμένο σημείο δεν δίνει καμιά βοήθεια που να οφείλεται στη διδασκαλία της ανάγνωσης των κειμένων που είναι γραμμένα στη φυσική γλώσσα. Ας θεωρήσουμε, σαν παράδειγμα, την παρακάτω πρόταση, που περιέχει λέξεις της φυσικής γλώσσας αλλά και μαθηματικά σύμβολα:

«Το διατεταγμένο ζεύγος (30,7) είναι μια λύση της ανισότητας $x+y>30$».

Σ' αυτή την πρόταση «διατεταγμένο ζεύγος», «λύση» και «ανισότητα» έχουν σχέση γραφήματος-φωνήματος αλλά (30,7) και $x+y>30$ δεν έχουν τέτοιες σχέσεις. Αυτή η πρόταση γραμμένη σε συνηθισμένα ελληνικά γίνεται:

«Το διατεταγμένο ζεύγος τριάντα κόμμα εφτά είναι μία λύση της ανισότητας χι συν ψι είναι μεγαλύτερο του τριάντα».

Συμπεραίνουμε ότι η μετατροπή μαθηματικών εκφράσεων όπως (30,7) σε λέξεις πρέπει ν' απομνημονευτεί από τους νεαρούς μαθητές. Το ίδιο πρόβλημα δημιουργείται με τη χρησιμοποίηση των αριθμών. Στο παραπάνω παράδειγμα οι αντιστοιχίες «3» $\Leftrightarrow$ τρία και «0» $\Leftrightarrow$ μηδέν δεν είναι αρκετές για να βρούμε την αντιστοιχία «30» $\Leftrightarrow$ τριάντα. Πράγματι αυτή η τελευταία αντιστοιχία πρέπει να μαθευτεί (από κάποιον που ξέρει ήδη να διαβάζει). Επιπλέον ο ρόλος του ίδιου αριθμού μπορεί να είναι διαφορετικός σε διαφορετικά μαθηματικά συμφραζόμενα όπως το δείχνει ο παρακάτω πίνακας:[8, 9]

7. *Ανάλογο παράδειγμα αναφέρεται στο βιβλίο:* R. Kane, M. Byrne, M. Hater, Helping children read mathematics. American Book Company. 1974 (p. 3).

8. R. Kane, M. Byrne, M. Hater, αναφ. παραπάνω.

9. *Γαγάτσης* Α., *«Discrimination des scores au test de closure et évaluation de la compréhension des textes mathématiques»*. Thèse de 3e cycle, Strasbourg, 1982.

Πίνακας 1
Ο αριθμός «2» σε διάφορες εκφράσεις με τις προφορές τους

Σύμβολο	Σύμβολο σε περιεχόμενο	Μετάφραση σε λέξεις
2	7-2	επτά μείον δύο
2	3^2	τρία στο τετράγωνο (ή στη δευτέρα)
2	$\sqrt[2]{4}$	τετραγωνική ρίζα του 4
2	25	είκοσι πέντε
2	250	διακόσια πενήντα
2	12	δώδεκα
2	α_2	άλφα δείκτης δύο

Το ίδιο φαινόμενο παρατηρείται και στα σύμβολα όπως δείχνει ο παρακάτω πίνακας:[10, 11]

Πίνακας 2
Το σύμβολο «-» σε διάφορες εκφράσεις με τις προφορές τους

Σύμβολο	Σύμβολο με περιεχόμενο	Μετάφραση σε λέξεις
-	7-2	Επτά μείον δύο
-	-2	Ο αρνητικός δύο, ο αντίθετος του δύο
-	$\frac{7}{2}$	Επτά διά δύο, επτά διαιρεμένο δια δύο
-	$\overline{AB}$	Αλγεβρική τιμή του διανύσματος AB

Μπορούμε λοιπόν να συμπεράνουμε ότι οι μαθητές πρέπει να απομνημονεύσουν την μετατροπή των αριθμών, συμβόλων και μαθηματικών εκφράσεων στην μιλούμενη γλώσσα.

Επιπλέον αν μπορούμε να πούμε ότι τα σχολικά βιβλία των μαθηματικών δανείζονται στοιχεία μιας λογικο-μαθηματικής γλώσσας, πρέπει να σημειώσουμε τουλάχιστον ότι δεν είναι μια μιλούμενη γλώσσα.

10. Πρόκειται για διαφορετικά σύμβολα που έχουν όμως (περίπου) την ίδια οπτική μορφή και μπορούν έτσι να ταυτιστούν από παιδιά μιας μικρής ηλικίας.

11. Βλέπε επίσης:
R. Kane, M. Byrne, M. Hater, αναφ. παραπάνω.
Γαγάτσης Α., 1984, αναφ. παραπάνω.
Γαγάτσης Α., 1982, αναφ. παραπάνω.

3. Μια γλώσσα ειδική για την ανάγνωση των μαθηματικών τύπων;

Είδαμε σύντομα τα χαρακτηριστικά της μαθηματικής γλώσσας, την ιδιαίτερη χρήση σ' αυτήν των γραμμάτων, αριθμών και των συμβόλων, το λεξιλόγιο και τη σύνταξή της. Με βάση τα προβλήματα που παρουσιάσαμε στην παράγραφο 2 η παρακάτω ερώτηση παρουσιάζει ενδιαφέρον:

«Μπορούμε να θεωρήσουμε ότι η εκφώνηση (προφορική ανάγνωση) των μαθηματικών τύπων είναι μια ολοκληρωμένη γλώσσα;»

Μια θετική απάντηση σ' αυτή την ερώτηση θα ήταν πολύ σημαντική για την διδασκαλία των μαθηματικών. Πράγματι τότε η παραπάνω γλώσσα θα μπορούσε να «διδαχτεί» στους μαθητές παράλληλα με την παρουσίαση της συμβολικο-μαθηματικής γλώσσας. Έτσι θα περιορίζονταν τα προβλήματα της ανάγνωσης των μαθηματικών κειμένων.

Για να υπάρξει όμως μια τέτοια γλώσσα πρέπει να ορίσουμε το λεξιλόγιό της και τη σύνταξή της. Η C. Laborde σε μελέτες της γύρω από τις γλώσσες των μαθηματικών ξεχωρίζει[12, 13]:

— τη συνηθισμένη (φυσική) γλώσσα (Σ.Γ.)
— τη μαθηματική γλώσσα (Γ_1)
— τις γραφές των τύπων (Γρ.)
— την εκφώνησή τους (Γ_2)

Στη συνέχεια για τον καθορισμό της Γ_2 προτείνει:

σαν *λεξιλόγιο* της Γ_2 την εκφώνηση (ή τις εκφωνήσεις) κάθε συμβόλου
σαν *σύνταξη* της Γ_2 την διάταξη (ή τις διατάξεις) κάθε τύπου.

Η εκφώνηση ενός τύπου συνίσταται στη μετάφρασή του από τη μαθηματική γραφή του (μετάφραση με τη συνηθισμένη έννοια της λέξης) και έπειτα ταξινόμηση των μεταφράσεων των συμβόλων σε μια ορισμένη σειρά (που δεν είναι απαραίτητα εκείνη που βρισκόταν μέσα στον τύπο). Έτσι: $|X|$ μπορεί να διαβαστεί «απόλυτη τιμή του Χ» έχοντας έτσι διαβάσει πρώτα τις δύο γραμμές $|\ \ |$ και στη συνέχεια το γράμμα Χ μέσα στις δύο γραμμές.

Οι λέξεις που χρησιμοποιούνται για να εκφράσουν τα σύμβολα είναι διαφορετικές από τις λέξεις της συνηθισμένης γλώσσας ή αν είναι ίδιες έχουν μια πολύ ειδική έννοια στη γλώσσα Γ_2. Ας πάρουμε σαν παράδειγμα το σύμβολο $\cap$ στον τύπο $A \cap B$ που εκφράζεται με τη λέξη τομή. Ανοίγοντας ένα λεξικό της ελληνικής γλώσσας, βρίσκουμε για τη λέξη «τομή» σχόλια ανάλογα με τα παρακάτω:

«Τομή = η πράξη και το αποτέλεσμα του τέμνω, διαίρεση, κόψιμο».

12. Laborde C., «*Langue naturelle et écriture simpolique*». Volume I et II. Thèse d'état. Grenoble 1982.

13. Laborde C., Un langage de prononcés de formules en mathématiques, *Revue Française de pédagogie*.

Επειδή η γραφή των μαθηματικών τύπων είναι από τη φύση τους σύντομη χάρη στη χρησιμοποίηση των συμβόλων, το ίδιο προσπαθεί να είναι και η γλώσσα εκφώνησης Γ_2.

Επίσης υπάρχουν στη Γ_2 πολλά φαινόμενα που δεν παρατηρούνται στη συνηθισμένη γλώσσα αλλά ούτε και στη μαθηματική γλώσσα. Ας πάρουμε τη σχέση $\alpha = \beta$.

Στη μαθηματική γλώσσα το «$\alpha = \beta$» είναι μια ανεξάρτητη πρόταση της οποίας το υποκείμενο είναι α, το ρήμα =, και το κατηγορούμενο β[14].

Στη συνηθισμένη γλώσσα λέμε «το α είναι ίσο με το β».

Στη γλώσσα Γ_2 όμως λέμε «α ίσον β».

Βλέπουμε δηλαδή ότι στη γλώσσα Γ_2 έχουμε *παραλείψεις ρημάτων* (το ρήμα «είναι» στο παράδειγμά μας), *καταργήσεις άρθρων* (τ' άρθρα «το» και «το» στο παράδειγμά μας) αλλά και *καταργήσεις προθέσεων* (εύκολο είναι να βρούμε παραδείγματα). Οι λέξεις που μένουν είναι απαραίτητες για την κατανόηση. Η C. Laborde[15] δίνει έναν πίνακα τύπων, ανάλογων με το δικό μας παράδειγμα, όπου παρατηρούνται παραλείψεις ρημάτων, άρθρων και προθέσεων. Όμως οι τύποι αυτοί μεταφράζονται στα γαλλικά (εκφωνούνται στα γαλλικά) και γι' αυτό το λόγο δεν παρουσιάζουν μεγάλο ενδιαφέρον για μας. Εξάλλου η ίδια η Laborde τονίζει στο ίδιο άρθρο της ότι οι απόψεις της, οι προτάσεις που κάνει αλλά και η έρευνα που ακολουθεί αφορούν μόνο τη γαλλική γλώσσα. Θέτει μάλιστα το ερώτημα αν ισχύουν οι ίδιες απόψεις για το σχηματισμό της γλώσσας Γ_2 και για μια ξένη γλώσσα.

Οι απόψεις και τα παραδείγματα που προηγούνται μας οδηγούν στη σκέψη ότι και στα ελληνικά μπορούμε να θεωρήσουμε τη γλώσσα Γ_2 σαν μια γλώσσα διαφορετική από τις άλλες, γιατί έχει ένα *χαρακτηριστικό λεξιλόγιο* και μια *χαρακτηριστική σύνταξη*.

4. Είναι η Γ_2 μια καθολική γλώσσα;

Μ' αυτή την ερώτηση θέλουμε να πούμε αν η γλώσσα Γ_2, χρησιμοποιείται απ' όλους με τον ίδιο τρόπο ή διαφορετικά. Οι πρώτες παρατηρήσεις δείχνουν ότι η γλώσσα Γ_2 δεν είναι μια γλώσσα σταθερή, καθολική όπως η γραφή των τύπων. Πράγματι:

α) ο ίδιος τύπος δεν έχει μια μοναδική εκφώνηση στη Γ_2 π.χ. ο τύπος $\frac{7}{2}$ (βλέπε στον πίνακα 2 προηγούμενα) διαβάζεται με τρεις τουλάχιστον διαφορετικούς τρόπους:

14. Γαγάτσης Α., 1984, αναφ. παραπάνω.

15. Laborde C., Un langage de prononcés de formules en mathématiques, αναφ. παραπάνω.

— επτά διά δύο
— επτά διαιρεμένο διά δύο
— επτά δεύτερα

β) Όμοια ορισμένα σύμβολα έχουν διαφορετικές εκφωνήσεις. Το ∀ διαβάζεται «για κάθε» ή «οποιοδήποτε».

γ) Ορισμένα σύμβολα έχουν διαφορετικές εκφωνήσεις ανάλογα με τον τύπο στον οποίο χρησιμοποιούνται.

Έτσι το σημείο του πολλαπλασιασμού «.» (που παραλείπεται στην γραπτή μαθηματική γλώσσα) άλλοτε διαβάζεται κι άλλοτε όχι:

— ο τύπος αβ διαβάζεται «άλφα βήτα»
— ο τύπος (α+β) (γ+δ) διαβάζεται συχνά «άλφα συν βήτα *επί* γάμα συν δέλτα».

Επίσης οι παρενθέσεις (που χρησιμοποιούνται ιδιαίτερα στη μαθηματική γλώσσα Γ_1 όπως αναφέραμε στην παράγραφο 1) άλλοτε παίρνονται υπόψη στη γλώσσα εκφώνησης Γ_2 κι άλλοτε όχι: Έτσι ο τύπος ημ(α+β) *διαβάζεται «ημίτονο άλφα συν βήτα» (αγνοείται η παρένθεση). Αντίθετα ο* τύπος f(x) διαβάζεται «εφ του χι» (παίρνουμε υπόψη την παρένθεση προσθέτοντας το άρθρο «του»).

Χωρίς αμφιβολία η εκφώνηση εξαρτάται από τις χρήσεις, από τα πολύ παλιά έθιμα όπως και από τις συνήθειες του ομιλητή (καθηγητή) και των συμφωνιών που μπορεί να έχουν γίνει. Έτσι σε μαθητές που μόλις έχουν γνωρίσει την προσεταιριστική ιδιότητα της πρόσθεσης, ο καθηγητής θα επιμείνει στη θέση των παρενθέσεων κατά την εκφώνηση του «α+(β+γ)» διαβάζοντας π.χ. «άλφα συν παρένθεση βήτα συν γάμα κλείνει η παρένθεση». Αργότερα για τους ίδιους μαθητές δεν θα κρίνει απαραίτητο να το κάνει.

Αν ένας τύπος ή ένα σύμβολο δεν έχει μια μοναδιαία εκφώνηση, τότε μια εκφώνηση μπορεί ν' αποδώσει πολλές πιθανές ερμηνείες.

Η Laborde (στο άρθρο που αναφέρθηκε) δίνει το παράδειγμα «e στη δύναμη x συν ένα» που είναι η εκφώνηση του e^x+1 (1) όπως και του e^{x+1} (2). Η μόνη διαφορά που γίνεται αισθητή στους συνηθισμένους είναι μια αναπνοή (ή μισή παύση) που γίνεται πριν από το συν στην (1) και πριν από το x στην (2). Οι αμφιλογίες αυτές εμφανίζονται συχνά (όπως σ' αυτό το παράδειγμα) για τις εκφράσεις που βρίσκονται σε παρενθέσεις ή γιατί οι παρενθέσεις παραλείπονται κατά την ανάγνωση ή γιατί η παρένθεση που ανοίγει μεταφράζεται με παύση ή πάλι γιατί η παρένθεση που κλείνει δεν εκφωνείται ούτε με λέξη ούτε με παύση.

Εδώ τονίζουμε ότι στην παράγραφο 1 είχαμε αναφέρει ότι ορισμένες εκφράσεις της μαθηματικής γλώσσας θα ήταν διφορούμενες σε περίπτωση απουσίας των παρενθέσεων, αν δεν υπήρχαν οι κανόνες προτεραιότητας για να τις διορθώσουν. Βλέπουμε την ύπαρξη ενός ανάλογου προβλήματος στη

Γ_1 (μαθηματική γλώσσα) και την Γ_2.

Επειδή λοιπόν η Γ_2 δεν είναι μια καθολική γλώσσα (όπως φαίνεται από τις προηγούμενες παρατηρήσεις) συχνά οι μαθητές και οι καθηγητές δεν συνειδητοποιούν την ύπαρξή της. Έτσι συμβαίνει οι αναγνώστες να κάνουν στα προφορικά *παράφραση* ενός τύπου χρησιμοποιώντας μια φράση της μαθηματικής γλώσσας και όχι να τον εκφωνούν. Έτσι στην έκφραση «$\alpha \in R$» αντί να διαβάσουν «α στοιχείο του R» προφέρουν «το σύνολο R έχει για στοιχείο το α» ή «το α είναι ένα στοιχείο του R» ή «το στοιχείο α ανήκει στο σύνολο R». Μεταφράζουν δηλαδή απευθείας τον μαθηματικό τύπο, δεν τον διαβάζουν.

Σ' αυτές λοιπόν τις περιπτώσεις η Γ_1 παραμένει αχρησιμοποίητη, κι αυτό είναι λυπηρό γιατί η εκφώνηση του τύπου είναι πιο κοντά στη γραφή του παρότι η παράφρασή του. Επιπλέον υπάρχει ένας μεγάλος αριθμός παραφράσεων του ίδιου τύπου, πράγμα που κινδυνεύει να δημιουργήσει δυσκολίες στην παιδαγωγική διαδικασία καθώς οι μαθητές χάνονται στις πολλαπλές παραφράσεις ενός τύπου.

5. Μια έρευνα σε καθηγητές και μαθητές

Η C. Laborde[16], θέλοντας να σχηματίσει μια ιδέα για το πώς χρησιμοποιείται η Γ_2 από τους καθηγητές, έδωσε 14 μαθηματικούς τύπους να διαβαστούν από 100 διδάσκοντες της μέσης και ανώτατης εκπαίδευσης. Στη συνέχεια επιχειρεί μια ταξινόμηση των τύπων με βάση τις απαντήσεις των καθηγητών.

Η παραπάνω έρευνα μου δημιούργησε δύο ερωτήματα:

α) είναι δυνατή μια ταξινόμηση των μαθηματικών τύπων, λαμβάνοντας υπόψη τη μεγάλη ποικιλία αυτών των τύπων; (μια βιαστική ματιά σ' οποιοδήποτε σχολικό βιβλίο μαθηματικών θα μας έπειθε γι' αυτή τη μεγάλη ποικιλία).

β) από την άλλη πλευρά δεν θα ήταν εξίσου χρήσιμο (αν όχι πιο χρήσιμο) να γνωρίζουμε πώς χρησιμοποιείται η γλώσσα Γ_2 κι από τους μαθητές;

Τα δύο παραπάνω ερωτήματα κάνουν αναγκαίες περισσότερες από μία έρευνες.

Γι' αυτό το λόγο δόθηκε ένας μεγάλος αριθμός τύπων σε καθηγητές μαθηματικών και σε μαθητές Γ΄ Γυμνασίου και Β΄ Λυκείου[17]. Οι οδηγίες της

16. Laborde C., Un langage de prononcés de formules en mathématiques, αναφ. παραπάνω.

17. Οι καθηγητές μαθηματικών παρακολουθούσαν μαθήματα στη Σ.Ε.Λ.Μ.Ε. Λάρισας και στη Σ.Ε.Λ.Μ.Ε. Θεσσαλονίκης τη χρονιά 1984-85. Οι μαθητές ανήκαν σε Γυμνάσια και Λύκεια της Θεσσαλονίκης.

εξέτασης ήταν: «Γράψτε κάτω από κάθε μαθηματικό τύπο πώς θα τον εκφωνούσατε αυθόρμητα»[18].

1η Έρευνα

α) Δόθηκαν 28 τύποι σε 12 καθηγητές μαθηματικών.
β) Δόθηκαν οι ίδιοι 28 τύποι σε 31 μαθητές Β΄ Λυκείου.
γ) Δόθηκαν 36 τύποι σε 29 μαθητές Γ΄ Γυμνασίου.

Από αυτούς τους τελευταίους οι 28 τύποι είναι οι ίδιοι μ' αυτούς των α) και β) και 8 καινούργιοι που ανήκουν στη διδακτέα ύλη των μαθητών.

2η Έρευνα

α) Δόθηκαν 26 τύποι σε 23 καθηγητές μαθηματικών.
β) Δόθηκαν 17 από τους προηγούμενους τύπους σε 33 μαθητές Β΄ Λυκείου.
γ) Δόθηκαν οι παραπάνω 17 τύποι σε 25 μαθητές Γ΄ Γυμνασίου.

Αυτοί οι 17 τύποι αντιστοιχούν στη διδακτέα ύλη των μαθητών. Οι τύποι της 1ης και 2ης έρευνας είναι διαφορετικοί. Η σύμπτωση ενός ή δύο τύπων είναι τυχαία. Επίσης τυχαία είναι και η σύμπτωση δύο από τους τύπους που χρησιμοποιήσαμε με δύο τύπους της έρευνας της C. Laborde.

Οι πίνακες που ακολουθούν αναφέρονται στην 2η έρευνα. Ξεχωρίσαμε ανάμεσα στις απαντήσεις που πήραμε πολλά είδη τύπων:

1ο είδος: Τύποι που εκφωνούνται σχεδόν ομόφωνα με τον ίδιο τρόπο.
2ο είδος: Τύποι που εκφωνούνται απ' την απόλυτη πλειοψηφία με τον ίδιο τρόπο.
3ο είδος: Τύποι που εκφωνούνται με περισσότερους τρόπους καθένας σε μια αναλογία περίπου 1/3.
4ο είδος: Τύποι που εκφωνούνται σχεδόν με τόσους τρόπους όσες και οι απαντήσεις. Εδώ πρόκειται μάλλον για παραφράσεις.

Οι πίνακες που ακολουθούν αφορούν την 2η έρευνα.

(Οι αντίστοιχοι πίνακες της πρώτης έρευνας βρίσκονται στο παράρτημα στο τέλος του άρθρου).

18. Στην πραγματικότητα δεν μπορούμε να ελέγξουμε το βαθμό του αυθορμητισμού των απαντήσεων. Είναι δύσκολο να δοθεί έξω από ένα συγκεκριμένο κείμενο, η εκφώνηση ενός τύπου, όπως θα το έκανε κάποιος κατά τη διάρκεια ενός συγκεκριμένου μαθήματος μαθηματικών ή κατά τη διάρκεια της ανάγνωσης ενός κάποιου μαθηματικού περιεχομένου. Υπάρχει λοιπόν φόβος ότι η μορφή του πειράματος επιδρά στις απαντήσεις.

Πίνακας 3
Εκφωνήσεις των Καθηγητών

Είδος	Γραφή τύπου	Εκφωνήσεις που δόθηκαν	Έδωσαν τα
	$\alpha \in \{\alpha, \beta, \gamma\}$	Το α ανήκει στο σύνολο με στοιχεία α, β, γ	80%
	$4 \leqslant 6$	Το τέσσερα μικρότερο ή ίσο του έξι	95%
	$\lvert \alpha . \beta \rvert$	Απόλυτη τιμή του α επί β	95%
1	$\forall x_1, x_2 \in A$ $f(x_1) \neq f(x_2) \Rightarrow$ $\Rightarrow x_1 \neq x_2$	Για κάθε x_1, x_2 που ανήκουν στο Α, η σχέση f του x_1 διάφορο του f του x_2 συνεπάγεται x_1 διάφορο του x_2	80%
	$\overset{\frown}{AB}$	Τόξο Α, Β	95%
	$\alpha+(-\beta)$	α συν παρένθεση πλην β κλείνει η παρένθεση	60%
	$(\alpha-\beta)^2$	α πλην β και όλο στο τετράγωνο	60%
	$x(y+z)$	x επί ανοίγει παρένθεση y συν z κλείνει η παρένθεση	60%
	$P(x, y)$	P του x κόμμα y	60%
	$\Delta\mu^{\nu}$	Διατάξεις των ν ανά μ	60%
	$\binom{\nu}{\mu}$	Συνδυασμοί των ν ανά μ	60%
2	$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx$	Ολοκλήρωμα από το άλφα μικρό μέχρι το βήτα μικρό του f του x επί d του x	65%
	$\{\alpha, \beta, \gamma\}$	*Σύνολο με στοιχεία α, β, γ*	60%
	$\alpha \oplus \beta$	α πράξη β	60%
	$(A \cap B) \cap \Gamma$	1. Παρένθεση άλφα τομή βήτα κλείνει η παρένθεση τομή γάμα	48%
		2. Άλφα τομή βήτα και όλο τομή γάμα	45%
	$(\alpha^{\nu})^{\mu}$	1. Παρένθεση α μικρό στη ν κλείνει η παρένθεση και όλο στη μ	25%
		2. α στη ν και όλο στη μ	45%
		3. Η νιοστή δύναμη του α υψούμενη στη μιοστή δύναμη	30%
	$\frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\beta}}$	1. Ρίζα του α προς ρίζα του β	20%
		2. Γραμμή κλάσματος αριθμητής τετραγωνική ρίζα του α προς τετραγωνική ρίζα του β	35%
		3. Τετραγωνική ρίζα του α προς τετραγωνική ρίζα του β	45%
	$(\alpha+\beta)(\alpha-\beta)$	1. α συν β επί α πλην β	50%
		2. Παρένθεση α συν β κλείνει η παρένθεση επί παρένθεση α πλην β κλείνει η παρένθεση	50%
	$(x.y).z$	1. x επί y και όλο επί z	40%
		2. Παρένθεση x επί y κλείνει η παρένθεση επί z	45%
3	$\overline{z_1+z_2}$	1. Συζυγείς του αθροίσματος z_1 συν z_2	40%
		2. Συζυγείς του z_1 και z_2	20%
	$(\sqrt[\nu]{\alpha})^{\kappa}$	1. Νιοστή ρίζα του α και όλο στην κ	45%
		2. Παρένθεση, νιοστή ρίζα του α, κλείνει η παρένθεση και όλο στην κ	25%

	$\log_\beta\theta = \dfrac{\log_\alpha\theta}{\log_\alpha\beta}$	1. Λογάριθμος του θήτα με βάση βήτα ίσο με γραμμή κλάσματος αριθμητής λογάριθμος του θήτα με βάση άλφα παρονομαστής λογάριθμος του βήτα με βάση το άλφα	40%
		2. Λογάριθμος του θήτα προς βάση βήτα ίσο με λογάριθμό του θήτα ως προς άλφα δια λογαρίθμου του β ως προς άλφα	35%
	$\vec{\alpha}\,.\,\vec{\beta}$	1. Εσωτερικό γινόμενο των διανυσμάτων α και β	50%
		2. Γινόμενο των διανυσμάτων α επί β	48%
4	$\lim\limits_{\nu\to n}(\alpha\nu+\beta\nu)$ $\sum\limits_{i=1}^{n}\alpha i$ $x\equiv\pi/3[2\pi]$		

Πίνακας 4
Εκφωνήσεις των μαθητών Β΄ λυκείου

Είδος	Γραφή τύπου	Εκφωνήσεις που δόθηκαν	Έδωσαν τα
	$\alpha \in \{\alpha, \beta, \gamma\}$	Το α ανήκει στο σύνολο α, β, γ	75%
	$4 \leqslant 6$	*Το τέσσερα μικρότερο ή ίσο του έξι*	97%
1	$\|\alpha . \beta\|$	Απόλυτη τιμή του α επί β	90%
	$\forall\, x_1, x_2 \in A$ $f(x_1) \neq f(x_2) \Rightarrow$ $\Rightarrow x_1 \neq x_2$	Για κάθε x_1, x_2 που ανήκουν στο Α και f του x_1 διάφορο του f του x_2 συνεπάγεται x_1 διάφορο του x_2	80%
	$\widehat{AB}$	Τόξο Α, Β	95%
	$(\alpha^\nu)^\mu$	*α στην ν και όλο στη μ*	68%
2	$(\alpha-\beta)^2$	α μείον β και όλο στο τετράγωνο	60%
	$\{\alpha, \beta, \gamma\}$	Σύνολο με στοιχεία α, β, γ	65%
	$\frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\beta}}$	1. Ρίζα του α προς ρίζα του β	45%
		2. *Τετραγωνική ρίζα του α προς τετραγωνική ρίζα του β*	48%
	$(\alpha+\beta)(\alpha-\beta)$	1. α συν β επί α πλην β	45%
		2. Παρένθεση α συν β κλείνει η παρένθεση α πλην β	40%
	$(x.y).z$	1. x επί y και όλο επί z	40%
		2. x επί y σε παρένθεση και όλο επί z	38%
3	$x(y+z)$	1. *Πολλαπλασιάζω το x επί το άθροισμα y συν z*	30%
		2. Πολλαπλασιάζω τα x με την παρένθεση y συν z	30%
	$P\,(x, y)$	1. Προτασιακός τύπος του x και y	30%
		2. P του x, y	35%
	$\vec{\alpha}.\vec{\beta}$	1. Διάνυσμα α επί διάνυσμα β	35%
		2. Γινόμενο των διανυσμάτων α επί β	30%
	$(\sqrt[\nu]{\alpha})^\kappa$	1. Νιοστή ρίζα του α και όλο στην κ	50%
		2. *Παρένθεση, νιοστή ρίζα του α, κλείνει η παρένθεση και όλο στην κ*	25%
4	$(A \cap B) \cap \Gamma$		
	$\alpha+(-\beta)$		

Πίνακας 5
Εκφωνήσεις των μαθητών Γ΄ Γυμνασίου

Είδος	Γραφή τύπου	Εκφωνήσεις που δόθηκαν	Έδωσαν τα
	$4 \leqslant 6$	Το τέσσερα είναι μικρότερο ή ίσο του έξι	88%
1	$\frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\beta}}$	Ρίζα του άλφα προς ρίζα του βήτα	92%
	$\lvert \alpha . \beta \rvert$	Απόλυτη τιμή του άλφα επί βήτα	88%
	$\vec{\alpha} . \vec{\beta}$	Διάνυσμα α επί διάνυσμα β	92%
	$\widehat{AB}$	Τόξο Α, Β	76%
	$\alpha \in \{\alpha, \beta, \gamma\}$	Το α ανήκει στο σύνολο α, β, γ	60%
	$(\alpha^{\nu})^{\mu}$	α στη ν και όλο στη μ	60%
2	$(\alpha+\beta)(\alpha-\beta)$	Παρένθεση α συν β κλείνει η παρένθεση, επί παρένθεση α πλην β κλείνει η παρένθεση	64%
	$\forall\ x_1, x_2 \in A$	Για κάθε x_1, x_2 που ανήκουν στο Α,	
	$f(x_1) \neq f(x_2)$	f του x_1 διάφορο από το f του x_2	
	$\Rightarrow x_1 \neq x_2$	συνεπάγεται και x_1 διάφορο του x_2	64%
	$\{\alpha, \beta, \gamma\}$	Σύνολο με στοιχεία α, β, γ	60%
	$(A \cap B) \cap \Gamma$	1. Παρένθεση Α τομή Β κλείνει η παρένθεση τομή Γ	44%
		2. Α τομή Β τομή Γ	24%
	$\alpha+(-\beta)$	1. Άλφα συν, ανοίγει η παρένθεση πλην βήτα κλείνει η παρένθεση	48%
		2. α συν το πλην β	24%
		3. α συν, το πλην β σε παρένθεση	24%
3	$(x.y)z$	1. Ανοίγει παρένθεση x επί y κλείνει η παρένθεση επί z	44%
		2. x επί y μέσα σε παρένθεση επί z	32%
		3. x επί y και όλο επί z	16%
	$x(y+z)$	1. x επί ανοίγει η παρένθεση y συν z κλείνει η παρένθεση	44%
		2. x επί παρένθεση y συν z	40%
		1. P του x, y	36%
	$P\ (x,\ y)$	2. P παρένθεση x, y κλείνει η παρένθεση	24%
		3. Προτασιακός τύπος P του x, y	24%
	$(\sqrt[\nu]{\alpha})^{\kappa}$	1. Νιοστή ρίζα του α και όλο στην κ	36%
		2. Ανοίγω παρένθεση, νιοστή ρίζα του α, κλείνει η παρένθεση, στην κ	36%
		3. Νιοστή ρίζα του α σε παρένθεση και όλο στην κ	20%
	$(\alpha-\beta)^2$	1. Παρένθεση άλφα πλην βήτα κλείνει η παρένθεση και όλο στο τετράγωνο	44%
		2. Άλφα πλην βήτα και όλο στο τετράγωνο	36%

Συγκρίνοντας τις εκφωνήσεις που έδωσαν οι καθηγητές και οι μαθητές Β΄ Λυκείου και Γ΄ Γυμνασίου για τους ίδιους τύπους, κάναμε τον παρακάτω πίνακα.

Πίνακας 6
Σύγκριση των αποτελεσμάτων

Γραφή τύπου	Ε Ι Δ Ο Σ		
	Καθηγητές	Μαθητές Β΄ Λυκ.	Μαθητές Γ΄ Λυκ.
1. $\alpha \in \{\alpha, \beta, \gamma\}$	1ο	1ο	2ο
2. $4 \leqslant 6$	1ο	1ο	1ο
3. $(A \cap B) \cap \Gamma$	3ο	4ο	3ο
4. $\alpha + (-\beta)$	2ο	4ο	3ο
5. $(\alpha')''$	3ο	2ο	2ο
6. $\dfrac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\beta}}$	3ο	3ο	1ο
7. $\lvert\alpha . \beta\rvert$	1ο	1ο	1ο
8. $(\alpha - \beta)^2$	2ο	2ο	3ο
9. $(\alpha + \beta)(\alpha - \beta)$	3ο	3ο	2ο
10. $(x.y)z$	3ο	3ο	3ο
11. $x(y+z)$	2ο	3ο	3ο
12. $P\,(x, y)$	2ο	3ο	3ο
13. $\forall\, x_1, x_2 \in A \;\; f(x_1) \neq f(x_2) \Rightarrow x_1 \neq x_2$	1ο	1ο	2ο
14. $(\sqrt{\alpha})'$	3ο	3ο	3ο
15. $\vec{\alpha}.\vec{\beta}$	3ο	3ο	1ο
16. $\{\alpha, \beta, \gamma\}$	2ο	2ο	2ο
17. $\widehat{AB}$	1ο	1ο	1ο

Παρατηρήσεις στην 1η έρευνα

1) Τ' αποτελέσματα της έρευνας, όπως φαίνονται στους παραπάνω πίνακες, δικαιώνουν τις επιφυλάξεις που διατυπώθηκαν σε σχέση με την ταξινόμηση των συμβόλων. Πράγματι η C. Laborde[1] αναφέρει ότι οι τύποι του πρώτου είδους είναι τύποι σύντομοι (όχι περισσότερα από τέσσερα σύμβολα). Μια άμεση διάψευση αυτής της διαβεβαίωσης μας δίνουν οι τύποι:

$$\alpha \in \{\alpha, \beta, \gamma\}$$

$$\forall\, x_1, x_2 \in A \qquad f(x_1) \neq f(x_2) \;\Rightarrow\; x_1 \neq x_2$$

Σύμφωνα με τους παραπάνω πίνακες, οι τύποι αυτοί είναι του πρώτου είδους για τους καθηγητές, για τους μαθητές Β΄ Λυκείου και μόνο για τους μαθητές της Γ΄ Γυμνασίου είναι δευτέρου είδους.

Μόνο για τους μαθητές της Γ΄ Γυμνασίου οι τύποι πρώτου είδους φαίνονται να είναι σύντομοι.

2) Η Laborde[19] επίσης ισχυρίζεται ότι οι τύποι τρίτου είδους έχουν το λιγότερο πέντε σύμβολα και ότι οι τύποι τετάρτου είδους είναι οι εκτενέστεροι από όλους. Τ' αποτελέσματά μας φαίνεται να διαψεύδουν αυτή την άποψη. Πράγματι ο τύπος $\sum_{i=1}^{n} a_i$ είναι τετάρτου είδους, σύμφωνα με τις εκφωνήσεις των καθηγητών, χωρίς να είναι εκτενέστερος απ' άλλους. Υπάρχουν και άλλα ανάλογα παραδείγματα στους παραπάνω πίνακες που αποδεικνύουν ότι τουλάχιστον για την ελληνική γλώσσα (πιθανό είναι και γι' άλλες) δεν μπορεί να γίνει ταξινόμηση των τύπων με βάση τον αριθμό των συμβόλων τους.

3) Υπάρχουν τύποι για τους οποίους οι καθηγητές, οι μαθητές της Β΄ Λυκείου και οι μαθητές της Γ΄ Γυμνασίου συμφωνούν π.χ. οι τύποι $4 \leqslant 6$, $|\alpha.\beta|$, $\widehat{AB}$ είναι για όλους τύποι πρώτου είδους. Ο τύπος $\{\alpha, \beta, \gamma\}$ είναι για όλους τύπος δεύτερου είδους, κ.λπ.

4) Το ότι μερικοί τύποι εκφωνούνται με πολλούς τρόπους είναι συχνά χωρίς μεγάλη σημασία για την κατανόηση αυτών των τύπων. Όμως μερικές εκφωνήσεις μπορούν ν' αλλάξουν τη μαθηματική σημασία ενός τύπου. Ας πάρουμε για παράδειγμα τον τύπο

$$\vec{\alpha}.\vec{\beta}$$

Για τον τύπο αυτό πήραμε τις εκφωνήσεις:

Γ΄ Γυμνασίου:	«Διάνυσμα α επί διάνυσμα β»	(92%)
Β΄ Λυκείου	: «Διάνυσμα α επί διάνυσμα β»	(35%)
	: «Γινόμενο των διανυσμάτων α επί β»	(30%)
Καθηγητές	: «Γινόμενο των διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ επί $\vec{\beta}$»	(48%)
	: «Εσωτερικό γινόμενο των διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$»	(50%)

Αν για τους μαθητές είναι φυσική η παραπάνω εκφώνηση (είναι πιθανόν ότι δεν γνωρίζουν άλλο είδος γινομένου), προκαλεί έκπληξη το ότι οι μισοί καθηγητές διαβάζουν τον παραπάνω τύπο «Γινόμενο των διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ επί $\vec{\beta}$»: κάποιος που ακούει αυτή τη φράση δεν γνωρίζει αν πρόκειται για εσωτερικό ή διανυσματικό γινόμενο. Πρέπει να σημειωθεί ότι ο ίδιος τύπος δόθηκε και στην έρευνα της Laborde και 60% των Γάλλων καθηγητών δώσανε την εκφώνηση «α εσωτερικό γινόμενο β». Αυτή η μικρή όμως διαφοροποίηση οφείλεται στο ότι οι Γάλλοι καθηγητές εκφωνούσαν στη συνέχεια τον τύπο $\vec{\alpha} \wedge \vec{\beta}$, κι αυτό ανάγκασε αρκετούς να ξεχωρίσουν το εσωτερικό από το διανυσματικό γινόμενο.

5) Μια ακόμη σύγκριση μπορεί να γίνει ανάμεσα στην έρευνα αυτή και στην έρευνα της Laborde. Πράγματι για τον τύπο $4 \leqslant 6$ πήραμε τις εκφωνήσεις:

Καθηγητές : «Το τέσσερα μικρότερο ή ίσο του έξι» (95%)
Μαθητές Β΄ Λυκείου : «Το τέσσερα μικρότερο ή ίσο του έξι» (97%)
Μαθητές Γ΄ Γυμνασίου: «Το τέσσερα είναι μικρότερο ή ίσο του έξι» (88%)
Αντίστοιχα η C. Laborde πήρε την παρακάτω εκφώνηση για τον τύπο $3 \leqslant 4$:
«Τρία μικρότερο ή ίσο του τέσσερα» (80%)

Υπάρχει μια συμφωνία στα αποτελέσματα αλλά οι Γάλλοι καθηγητές δίνουν πραγματικά μια εκφώνηση στη γλώσσα Γ_2, ενώ οι Έλληνες προσθέτουν το άρθρο. Από την άλλη πλευρά οι μαθητές της Γ΄ Γυμνασίου δίνουν μια παράφραση του τύπου χρησιμοποιώντας και ρήμα («είναι») και άρθρα («το», «του»). Αυτό αποτελεί ίσως μια ένδειξη για το ότι η σωστή χρήση της γλώσσας Γ_2 προϋποθέτει κι ένα καλό μαθηματικό επίπεδο, ενώ τ' άτομα μικρής ηλικίας ή χαμηλού επιπέδου δεν διαβάζουν τους τύπους αλλά τους μεταφράζουν με μια παράφραση.

6) Είναι χαρακτηριστική η διαφορά ανάμεσα στις εκφωνήσεις των μαθητών της Β΄ Λυκείου και της Γ΄ Γυμνασίου για μερικούς τύπους. Έτσι ο τύπος $\frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\beta}}$ διαβάζεται από τα 92% των μαθητών της Γ΄ Γυμνασίου σαν «ρίζα του άλφα προς ρίζα του βήτα». Για τον ίδιο τύπο 45% των μαθητών της Β΄ Λυκείου δίνουν την ίδια εκφώνηση και 48% την εκφώνηση «τετραγωνική ρίζα του άλφα προς τετραγωνική ρίζα του βήτα» (Οι καθηγητές προσθέτουν και μια τρίτη εκφώνηση).

Παρατηρήσεις στη 2η έρευνα

1) Οι τύποι που χρησιμοποιήθηκαν είναι περισσότεροι από την πρώτη και μερικοί άγνωστοι για τους μαθητές. Γι' αυτό διακρίναμε ένα πέμπτο τύπο τύπων που δεν απαντιούνται καθόλου από τους μαθητές (βλέπε στο παράρτημα). Εδώ φαίνεται αυτό που τονίσαμε στην παράγραφο 2, ότι δηλαδή το γραμμένο σημείο δεν δίνει καμιά βοήθεια για την ανάγνωσή του για πρώτη φορά. Η εκφώνηση λοιπόν μερικών τύπων πρέπει να μαθαίνεται από τους νεαρούς μαθητές. Το ερώτημα είναι αν οι καθηγητές τους θα τους μαθαίνουν μια παράφραση των τύπων ή την εκφώνησή τους στη Γ_2.

2) Κι αυτή η έρευνα δείχνει ότι δεν είναι αναγκαίο οι σύντομοι τύποι να εκφωνούνται από την πλειοψηφία των καθηγητών με τον ίδιο τρόπο και οι εκτενείς τύποι με πολλούς τρόπους. Έτσι ο τύπος $f(x) = [x]$ εκφωνείται από 75% των καθηγητών με τον ίδιο τρόπο.

3) Οι τύποι ανάμεσα στην 1η και 2η έρευνα είναι στην πλειοψηφία τους διαφορετικοί. Μερικοί τύποι όμως είναι κοινοί π.χ. ο $\binom{\nu}{\mu}$. Στην 1η έρευνα

60% των καθηγητών δώσανε την εκφώνηση: «Συνδυασμοί των ν ανά μ» και στην 2η έρευνα 59% δώσανε την ίδια εκφώνηση. Ανάλογες συμφωνίες παρατηρούνται και σ' άλλους τύπους. Είναι μία ένδειξη για την αξιοπιστία των αποτελεσμάτων.

4) Μια προσπάθεια ταξινόμησης των τύπων σε σχέση με τον βαθμό οικειότητάς τους στους αναγνώστες ή μαθητές δεν θα ήταν πετυχημένη όπως δείχνει ο τύπος α^2-β^2. Πράγματι ο τύπος αυτός είναι πολύ γνωστός στους μαθητές της Γ΄ Γυμνασίου. Παρ' όλα αυτά και οι μαθητές και οι καθηγητές δεν συμφωνούν στον τρόπο εκφώνησής του.

5) Ο τύπος $C_\Omega A$ διαβάζεται από 67% των Ελλήνων καθηγητών σαν: «συμπλήρωμα του Α ως προς το Ω». Αντίστοιχα ο τύπος $C_E A$ διαβάζεται από το 80% των Γάλλων καθηγητών σαν:
«συμπλήρωμα του Α μέσα στο Ε». Παρατηρούμε πάλι την ύπαρξη μιας συμφωνίας ανάμεσα στις δύο έρευνες.

6. Συμπεράσματα

Τα παρδείγματα που παρουσιάσαμε δείχνουν ότι υπάρχουν προβλήματα σε σχέση με την παραγωγή μιας προφορικής γλώσσας κατά την ανάγνωση ενός μαθηματικού κειμένου. Αυτά τα προβλήματα είναι μερικές φορές εξίσου ή πιο σημαντικά από τον τρόπο παρουσίασης μιας μαθηματικής έννοιας. Η άγνοια ή η υποτίμησή τους από τον καθηγητή μπορεί να συμβάλει στη μη κατανόηση των μαθητών. Η έρευνά μας ενισχύει την παραπάνω άποψη. Πράγματι οι μαθητές δεν μπορούσαν να εκφωνήσουν τύπους άγνωστους σ' αυτούς.

Μπορούμε να ξεπεράσουμε μερικά απ' αυτά τα προβλήματα διδάσκοντας την γλώσσα εκφώνησης των μαθηματικών τύπων (που ονομάσαμε Γ_2); Δύσκολα μπορούμε να απαντήσουμε θετικά σ' αυτό το ερώτημα. Πράγματι η γλώσσα Γ_2 δεν φαίνεται να είναι μια καθολική και σταθερή γλώσσα, όπως έδειξαν οι εκφωνήσεις των μαθητών και των καθηγητών.

Παρόλα αυτά μια πολύ σημαντική συμφωνία υπάρχει σήμερα ανάμεσα στα σύμβολα συχνής χρήσης και τους τύπους που χρησιμοποιούνται. Έτσι κανένας δεν εκφωνεί σήμερα τα +, -, = διαφορετικά από συν, πλην, ίσον και τα α+β, α-β, α=β διαφορετικά από άλφα συν βήτα, άλφα μείον βήτα, άλφα ίσον βήτα, κάτι που δεν γινόταν στην αρχή του 20ού αιώνα. Πράγματι στα βιβλία των μαθηματικών της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης γύρω στα 1900 χρησιμοποιούνταν εκφράσεις όπως: «το άθροισμα του α και το άθροισμα του πραγματοποιημένου αθροίσματος του β και γ».

Αυτά λοιπόν μας κάνουν να σκεφτούμε ότι η γλώσσα Γ_2 υπάρχει αλλά εξελίσσεται σιγά-σιγά κι έτσι δεν μπορούμε να μιλήσουμε για διδασκαλία αυτής της γλώσσας. Εξάλλου η ύπαρξη της Γ_2 δεν γίνεται αισθητή απ' όλους όσους χρησιμοποιούν τα μαθηματικά και κύρια απ' όλους τους διδάσκοντες.

Εκείνο όμως που μπορεί να γίνεται στα βιβλία των μαθηματικών είναι ο ορισμός για κάθε τύπο που γράφεται με τη βοήθεια των νέων συμβόλων, της εκφώνησής του μέσα σε εισαγωγικά. Έτσι δηλώνεται ότι η εκφώνηση προέρχεται από μια γλώσσα διαφορετική από τις άλλες που χρησιμοποιούνται στο βιβλίο και βοηθούνται οι μαθητές.

Προβλήματα σαν αυτά που παρουσιάσαμε σ' αυτή την εργασία είναι πολύ σημαντικά για τα μαθηματικά όπου η επικοινωνία παρουσιάζει μια ιδιαιτερότητα, γιατί γίνεται προφορικά και γραπτά, χρησιμοποιώντας ένα μίγμα φυσικής και μαθηματικής γλώσσας. Εξάλλου σήμερα αυτό είναι ένα γεγονός παραδεκτό από όλους: τα προβλήματα της επικοινωνίας προσδιορίζουν την ανάπτυξη των επιστημών.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

ΠΙΝΑΚΕΣ ΤΗΣ ΠΡΩΤΗΣ ΕΡΕΥΝΑΣ

Πίνακας 1
Εκφωνήσεις των καθηγητών

Τύπος	Γραφή τύπου	Εκφωνήσεις που δόθηκαν	Έδωσαν τα
1	$\alpha:\beta$	α διά β	83%
	$(\widehat{\vec{\alpha}, \vec{\beta}})$	Γωνία των διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$	83%
	$f(x) = [x]$	f του χι ίσον ακέραιο μέρος του χι	75%
	$p \Rightarrow q$	p συνεπάγεται την q	75%
2	$A \in B$	Α υποσύνολο του Β	67%
	$p \Leftrightarrow q$	p ισοδύναμη με την q	67%
	$\binom{\nu}{\mu}$	Συνδυασμοί των ν ανά μ	59%
	$C_{\Omega}A$	Συμπλήρωμα του Α ως προς το Ω	67%
3	$A \cap B = \{3\}$	Α τομή Β ίσο με το μονομελές σύνολο 3	50%
		Α τομή Β ίσο με το σύνολο με στοιχείο το 3	33%
	$A \pm B$	Α σύμμετρο διαφορά Β	42%
		Συμμετρική διαφορά των συνόλων Α και Β	42%
	$\varphi(x)/f(x)$	φ(x) διαιρεί την f(x)	42%
		φι του x προς εφ του x	25%
	$A \in P(\Omega)$	Το Α ανήκει στο δυναμοσύνολο του Ω	33%
		Το σύνολο Α ανήκει στο δυναμοσύνολο του Ω	33%
	$\alpha_\nu \to \alpha \Leftrightarrow (\alpha_\nu - \alpha) \to 0$	Η ακολουθία αν συγκλίνει στο α, αν και μόνο αν η η α_ν-α συγκλίνει στο 0	33%
		α_ν τείνει στο α είναι ισοδύναμη με την α_ν-α τείνει στο μηδέν	25%
	$\sqrt[\nu]{\frac{\alpha}{\beta}}$	νιοστή ρίζα του α προς β	50%
		νιοστή ρίζα του πηλίκου α προς β	25%
	$\log_\beta \theta = \frac{\log_\alpha \theta}{\log_\alpha \beta}$	Λογάριθμος του θ με βάση β ίσον με τον λογάριθμο του θ με βάση α προς τον λογάριθμο με βάση α του β	42%
		α τετράγωνο πλην β τετράγωνο	42%
	$\alpha^2 - \beta^2$	α στο τετράγωνο πλην β στο τετράγωνο	33%
	$(\alpha^\mu)^\nu$	α στην μ και όλο στην ν	42%
		νιοστή δύναμη της μιοστής δύναμης του α	17%
	$Ax \uparrow\downarrow By$	ημιευθεία Αx αντίρροπη της ημιευθείας By	33%
		ημιευθεία Αx παράλληλη και αντίρροπη της By	25%
	$\vec{\alpha}^2 = \lvert\vec{\alpha}\rvert^2$	τετράγωνο του διανύσματος α ίσον με το τετράγωνο του μέτρου του διανύσματος α	42%
	$\lim f_\xi = A$	Όριο της f στο ξ ισούται με Α	42%
	$\langle \alpha, \beta \rangle$	Γραμμική θήκη των α, β	33%
	$(f \circ g)(x)$	f σύνθεση g του x	42%

	$S = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$	πίνακας s ίσον πρώτη γραμμή 1, 2, 3, 4 και δεύτερη γραμμή 2, 4, 1, 3	33%
	$\sum_{n=1}^{\infty} x_n$	Άθροισμα των x_n με n από 1 μέχρι ∞	33%
	$\prod_{i=1}^{n} a_i$	Γινόμενο των a_i με i από 1 μέχρι n	33%
4	$\varphi(x) \in R[x]$ $(\varphi \wedge g)(x)$ $R \ni \alpha < \beta \in R$		

Πίνακας 2
Εκφωνήσεις των μαθητών της Γ΄ Γυμνασίου

Τύπος	Γραφή τύπου	Εκφωνήσεις που δόθηκαν	Έδωσαν τα
1	—	—	—
	$A \subsetneq B$	Α υποσύνολο του Β	56%
	$p \Leftrightarrow q$	p ισοδυναμεί με το q	62%
	$\alpha:\beta$	α διά β	60%
2	$\alpha-\beta<0$	α μείον β μικρότερο του μηδενός	62%
	Ε.Κ.Π. (15, 20, 25)	Ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιο των 15, 20, και 25	54%
	$\alpha<x\leqslant\beta$	α μικρότερο του x και x μικρότερο ή ίσο του β	62%
	$p \Rightarrow q$	το p συνεπάγεται το q	23%
		p συνεπάγεται q	20%
	$A \cap B = \{3\}$	Α τομή Β είναι ίσο με το 3	36%
		Η τομή του Α και Β είναι το 3	23%
	$R \ni \alpha < \beta \in R$	Το Ρ περιέχει το α και αυτό μικρότερο του β που ανήκει στο R	23%
		Διαφορά τετραγώνων	23%
3	$\alpha^2-\beta^2$	α στο τετράγωνο μείον (πλην) β στο τετράγωνο	30%
	$(\alpha^{\mu})^{\nu}$	α εις την μι και όλο στην νι	50%
	$\vec{\alpha}^2 = \lvert\vec{\alpha}\rvert^2$ $\dfrac{\alpha\beta\gamma}{\gamma} = \alpha\beta$	Το διάνυσμα α στο τετράγωνο είναι ίσο με το μέτρο του διανύσματος α στο τετράγωνο αβγ διά γ είναι ίσο με το αβ	33%
		α επί β επί γ διά γ είναι ίσο με το α επί β	30%
	$\vec{AB} = (4, -8)$	Οι συντεταγμένες του διανύσματος $\vec{AB}$ είναι ίσες με 4 και -8	23%
		Το διάνυσμα ΑΒ είναι ίσο με το 4 και -8 η ευθεία ε κάθετη στο επίπεδο p	33%
		Το διάνυσμα $\vec{AB}$ είναι ίσο με το 4 και -8	36%
	$\varepsilon \perp (p)$	η ευθεία ε κάθετη στο επίπεδο p	33%
		η ευθεία ε κάθετη στο (p)	40%
	$\sqrt{\dfrac{\alpha}{\beta}}$		
4	$R-\{2, 3\}$		
	$\alpha>1 \Rightarrow \alpha^{\nu}>1$		
	$\forall\ 0<\nu<1$		
5		Οι υπόλοιποι τύποι δεν εκφωνήθηκαν	

Πίνακας 3
Εκφωνήσεις των μαθητών της Β΄ Λυκείου

Τύπος	Γραφή τύπου	Εκφωνήσεις που δόθηκαν	Έδωσαν τα
1	$(\alpha^{\mu})^{\nu}$	α εις τη μ και όλο στη ν	83%
2	$A \subseteq B$	Το Α υποσύνολο του Β	67%
	$p \Leftrightarrow q$	Το p ισοδυναμεί με το q	60%
	$p \Rightarrow q$	p συνεπάγεται q	47%
		το p συνεπάγεται το q	43%
	$A \cap B = \{3\}$	Η τομή των συνόλων Α και Β είναι το 3	34%
		Η τομή των Α και Β είναι το 3	27%
	$\varphi(x)/f(x)$	φ του x προς f του x	23%
	$\alpha_\nu \to \alpha \Leftrightarrow \alpha_\nu - \alpha \to \alpha$	α_ν τείνει στο α, ισοδυναμεί με το α_ν-α που τείνει στο 0	17%
	$S = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$	πίνακας πρώτη γραμμή 1 2 3 4 δεύτερη γραμμή 2 4 1 3	23%
	$R \ni \alpha < \beta \in R$	Το α ανήκει στο R και είναι μικρότερο του β που ανήκει στο R	37%
3	$\log_\beta \theta = \dfrac{\log_\alpha \theta}{\log_\alpha \beta}$	Λογάριθμος του θ με βάση β είναι ίσο με το πηλίκο λογαρίθμου θ με βάση α προς τον λογάριθμο β με βάση α	43%
	$\sqrt[\nu]{\dfrac{\alpha}{\beta}}$	νιοστή ρίζα του $\dfrac{\alpha}{\beta}$	47%
		νιοστή ρίζα του α προς β	37%
	$\alpha:\beta$	α διά β	43%
		α προς β	20%
		πηλίκο του α προς β	17%
	$\alpha^2-\beta^2$	Διαφορά τετραγώνων α και β	17%
		Διαφορά τετραγώνων	20%
	$\vec{\alpha}^2 = \lvert\vec{\alpha}\rvert^2$	Το τετράγωνο του διανύσματος είναι ίσο με το τετράγωνο της απόλυτης τιμής του διανύσματος $\vec{\alpha}$	40%
		Διάνυσμα στο τετράγωνο είναι ίσο με την απόλυτη τιμή του διανύσματος στο τετράγωνο	37%
	$\widehat{(\vec{\alpha}, \vec{\beta})}$	Γωνία του διανύσματος $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$	50%
4	$\lim_3 f = A$		
	$A + B$		
5		Οι υπόλοιποι τύποι δεν εκφωνήθηκαν	

Résumé

Dans cet article nous nous intéressons à l'utilisation dans une communication orale de la langue des textes mathématiques et en particulier des formules mathématiques. Pour avoir une idée de cette utilisation, nous présentons plusieurs formules mathématiques «à lire» aux enseignants et aux élèves de l'enseignement secondaire. Pour chaque formule nous obtenons un très grand nombre de paraphrases, ce qui risque de créer des difficultés d'ordre pédagogique, les élèves se perdant dans les multiples paraphrases d'une formule.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

ΓΑΓΑΤΣΗΣ Α., Διδακτική των μαθηματικών. Η εκτίμηση της κατανόησης των κειμένων με ιδιαίτερη αναφορά στα μαθηματικά κείμενα, Θεσσαλονίκη 1984, (υπό επανέκδοση).

ΓΑΓΑΤΣΗΣ Α., «Discrimination des scores au test de closure et évaluation de la compréhension des textes mathématiques», Thése de 3e cycle, Strasbourg, 1982.

GLAESER G., Mathématiques pour l'élève professeur, Hermann, Paris, 1971.

GLAESER G., Analyse de la transmission. Le livre de Mathématiques et sa lecture. Cours de 3e cycle. Université Louis Pasteur, Strasbourg, 1976.

GRIZE J.B., Langues logico-mathématiques et langues naturelles, Revue francaise de pédagogie, 1973, No 23.

KANE R., BYRNE M., HATER M., Helping children read mathematics. American Book Company, 1974 (p. 3).

LABORDE C., «Langue naturelle et écriture simpolique», Volume I et II. Thèse d'état. Grenoble 1982.

LABORDE C., «Un langage de prononcés de formules en mathématiques, Revue Francaise de pédagogie.

LAMB C.E., Language, reading and mathematics. A paper presented to the Second Conference on Language and Language Acquisition, Mons, Belgium, September 1980.

RASOLOFONIAINA I., Conditions d'apprentissage mathématique par la lecture. Thèse de 3e cycle. Strasbourg, Janvier 1973.