ΜΑΡΙΑ ΜΑΝΙΔΑΚΗ, ΠΑΝΑΓΙΩΤΗΣ ΚΥΡΑΝΑΣ, ΤΑΣΟΣ ΠΑΤΡΩΝΗΣ

ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΕΣ ΚΑΙ ΖΕΥΓΗ

Μια πειραματική προσέγγιση μέσα από προβλήματα, που τα επεξεργάστηκαν ομάδες μαθητών στη τάξη

«... Αυτό που έχουν περισσότερο ανάγκη
οι πειραματιστές, είναι ιδέες πειραμάτων».

RENÉ THOM

ΕΙΣΑΓΩΓΗ: Είναι γνωστά τα διλήμματα, που αντιμετωπίζει κανείς όταν θέλει να διδάξει τα διατεταγμένα ζεύγη, το καρτεσιανό γινόμενο, τις διμελείς σχέσεις και τις συναρτήσεις. Οι γνώμες των παιδαγωγών των Μαθηματικών σ' αυτό το σημείο διχάζονται: ΄Αλλοι θεωρούν το καρτεσιανό γινόμενο δύο (ή περισσοτέρων) συνόλων και τα υποσύνολά του (σχέσεις) —ή τους προτασιακούς τύπους δύο μεταβλητών— σαν τις πιο θεμελιώδεις έννοιες· μετά ορίζουν με τη βοήθειά τους την έννοια της συνάρτησης, σαν ειδική περίπτωση σχέσης. Και άλλοι, όπως ο H. FREUDENTHAL στο περίφημο έργο του «MATHEMATICS AS AN EDUCATIONAL TASK», θεωρούν την έννοια της συνάρτησης σαν πολύ σπουδαιότερη για τα Μαθηματικά και τις εφαρμογές τους και πιστεύουν ότι πρέπει να παρουσιάζεται στους μαθητές διαισθητικά, χωρίς να υπάγεται στην έννοια του καρτεσιανού γινομένου.

Σ' αυτό το άρθρο θα παρουσιάσουμε μια πειραματική δουλειά που έγινε με μαθητές Β΄ Γυμνασίου, με σκοπό να ερευνηθούν οι αυθόρμητες αντιδράσεις τους σε καινούργια γι' αυτούς προβλήματα-παραδείγματα εφαρμογής των νέων, πιο πάνω εννοιών σε καταστάσεις που τους ήταν οικείες από την καθημερινή εμπειρία τους. Η δουλειά αυτή έγινε τη σχολική χρονιά 1985-86 στο 34ο (τώρα 6ο) Γυμνάσιο Θεσ/νίκης, με τη βοήθεια ειδικών στηλών και άρθρων του «ΕΥΚΛΕΙΔΗ Α», περιοδικού της Ελλην. Μαθηματικής Εταιρείας για το Γυμνάσιο. Οι μαθητές δεν είχαν διδαχθεί το αντίστοιχο κεφάλαιο από το σχολικό βιβλίο, και το μοναδικό τους εφόδιο ήταν μια διαισθητική εισαγωγή, μέσα από το περιοδικό, στις έννοιες των συντεταγμένων, της αντιστοιχίας και της συνάρτησης —όπως περίπου θα το ήθελαν οι θιασώτες της δεύτερης απ' τις αντιμαχόμενες απόψεις που αναφέρθηκαν πιο πάνω— (είναι γνωστή μια παρόμοια εισαγωγή από το αγγλικό πρόγραμμα S.M.P. στο κεφάλαιο «SEQUENCES AND RELATIONS»).

Κύριος στόχος του πειράματος ήταν να ερευνηθεί κατά πόσο οι μαθητές θα μπορούσαν αυθόρμητα, συνεργαζόμενοι μεταξύ τους σε ομάδες και χωρίς εξωτερική βοήθεια, να «μεταφέρουν» ιδέες από την απλή, «αριθμητική» μορφή των διατεταγμένων ζευγών (συντεταγμένες) και των συναρτήσεων (που τους παρουσιάστηκε διαισθητικά μέσα απ' το περιοδικό) σε ανάλογες, συνθετότερες καταστάσεις που απαντούν στη ζωή τους.

1. Οι γενικοί και ειδικότεροι στόχοι του πειράματος και η μεθοδολογία που επιλέχθηκε

Η πειραματική δουλειά, που περιγράφεται πιο κάτω, προήλθε από την αναζήτηση μεθόδων εργασίας που να μην περιορίζονται στα στενά πλαίσια της επίλυσης μαθηματικών προβλημάτων, αλλά παράλληλα να φέρνουν στο φως αυθόρμητες αντιδράσεις των μαθητών σε έννοιες που είναι γνωστές από την καθημερινή εμπειρία, χωρίς όμως να είναι συνειδητά ταξινομημένες στη σκέψη τους. Πέρα από αυτό, να ξυπνούν τη διαίσθησή τους για απαντήσεις σε έννοιες άγνωστες από σχολικές διδασκαλίες μέχρι εκείνη τη στιγμή.

Τέτοιοι *γενικοί στόχοι* είναι, βέβαια, δύσκολο να επιτευχθούν ολικά, και ακόμα πιο δύσκολο —αν όχι αδύνατο— να αξιολογηθεί η επίτευξή τους με «ποσοτικά» μέσα (τεστ σε μεγάλη κλίμακα ή παράλληλη διδασκαλία σε γκρουπ και αξιολόγηση του ενός και του άλλου τρόπου διδασκαλίας με κοινά προβλήματα, στα οποία εξετάζονται οι μαθητές). Γιατί αποφασιστικό ρόλο στις πειραματικές διδασκαλίες παίζει ο διδάσκων και το πόσο «εμπνευσμένο» μάθημα κάνει, και, όσο αφορά τα τεστ, δεν είναι δυνατό να ερευνηθούν οι διεργασίες της σκέψης των μαθητών μέσα από τις απαντήσεις τους σε τυποποιημένα προβλήματα ή «κλειστά» ερωτηματολόγια.

Προκειμένου για τέτοιους στόχους, εκείνο που μας μένει φαίνεται να είναι —τουλάχιστον προς το παρόν— η λεπτή «ποιοτική» ανάλυση ενός μαθήματος ή ενός διαλόγου, που θα φωτίζει ειδικές πτυχές του μαθηματικού περιεχομένου, έτσι ώστε τα «τοπικά» συμπεράσματά μας να έχουν «κάτι» να μας πουν και για το ολικό πρόβλημα. Σαν ειδικό μαθηματικό περιεχόμενο εδώ επιλέξαμε αυτό που αναφέραμε στην εισαγωγή, και σαν ειδική μεθοδολογία την επεξεργασία μαθηματικών προβλημάτων κατά ομάδες, που έχει δοκιμαστεί με επιτυχία σε ερευνητικά κέντρα για τη Διδακτική των Μαθηματικών, όπως στην GRENOBLE της Γαλλίας (βλ. COLETTE

LABORDE «Σύγχρονες τάσεις στη Διδακτική των Μαθηματικών και της Πληροφορικής» σε απόδοση Βαγγ. Ευσταθόπουλου, Σύγχρονη Εκπαίδευση τεύχ. 25).

Σύμφωνα με τη μεθοδολογία αυτή, η τάξη χωρίζεται σε μικρές ομάδες μαθητών, οι οποίες εργάζονται πάνω σ' ένα σύνολο προβλημάτων. Τα διάφορα στάδια της συζήτησης καταγράφονται και αναλύονται μετά (οι ομάδες επικοινωνούν μεταξύ τους) με σκοπό να ερευνηθούν οι *διεργασίες της σκέψης* των μαθητών-λυτών και ιδιαίτερα οι *μετασχηματισμοί των αντιλήψεών τους* μέσα απ' αυτή την αλληλεπίδραση.

Η διαδικασία της διεξαγωγής του πειράματος περιγράφεται ακριβέστερα στην § 3. Πρωτύτερα θα θέλαμε να μιλήσουμε για το «υλικό» που χρησιμοποιήθηκε, δηλ. για τα άρθρα του «ΕΥΚΛΕΙΔΗ Α», τα προβλήματα που δόθηκαν και το τι επιδιώξαμε μέσα απ' αυτά.

2. Το «υλικό» και τα προβλήματα

Στο *Παράρτημα Α* της μελέτης μας φαίνονται οι πρώτες σελίδες από δύο ειδικά άρθρα του «ΕΥΚΛΕΙΔΗ Α», που χρησιμοποιήθηκαν για τους σκοπούς του πειράματος*. Ο ειδικότερος παιδαγωγικός στόχος αυτών των άρθρων ήταν να φανεί ότι οι ιδέες του διατεταγμένου ζεύγους, της αντιστοιχίας και της συνάρτησης δεν ήρθαν τυχαία ούτε αυθαίρετα στα Μαθηματικά, αλλά βγήκαν μέσα από την πείρα της ανθρώπινης κοινωνίας και μέσα απ' τις ανάγκες για τη λύση κάποιων πρακτικών προβλημάτων. Αυτό φαίνεται μέσα απ' το πρώτο άρθρο («Συντεταγμένες»), όπου η ανάγκη για τον εντοπισμό ενός σημείου στο επίπεδο ή στο χώρο οδηγεί στην εισαγωγή των συντεταγμένων, και η ανάγκη για έναν αποτελεσματικό και μονοσήμαντο συμβολισμό των συντεταγμένων ενός σημείου γεννάει την ιδέα του διατεταγμένου ζεύγους. Ακόμα, στο δεύτερο άρθρο φαίνεται ότι οι μαθηματικές συναρτήσεις είναι ειδικές αντιστοιχίες από τη γύρω μας υλική πραγματικότητα, που υπάρχουν σε κάποια μορφή μέσα στο μυαλό μας, αλλά δεν έχουμε μάθει να τις ξεχωρίζουμε· ακόμα, ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων είναι χρήσιμες, «ακριβείς» οπτικές παραστάσεις που έχουν άμεση εφαρμογή στη λύση προβλημάτων από την καθημερινή εμπειρία μας.

Χωρίς να έχει διδαχτεί στους μαθητές η αντίστοιχη ύλη από το σχολικό βιβλίο, και με μοναδικό εφόδιο την πιο πάνω διαισθητική εισαγωγή, που διάβασαν οι μαθητές από το περιοδικό, τους δόθηκαν για επεξεργασία 7

* ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ Α, τόμος ΙΘ, τεύχη 1 (Σεπτ.-Οκτ. 1985) και 2 (Νοεμ.-Δεκ. 1985).

προβλήματα, είτε διατυπωμένα μέσα στα ίδια τα άρθρα, είτε επιλεγμένα από τις ειδικές στήλες που τα συνόδευαν, με τίτλο «Σκεφθείτε και απαντήστε» και «Προβλήματα που προτείνουμε». Ο αναγνώστης θα βρει στο *Παράρτημα Β* την αναλυτική διατύπωση των προβλημάτων αυτών, που τέθηκαν με τη σειρά Β1, Β2,... μέχρι και Β7.

Όπως παρατηρεί κανείς ύστερα από την ανάγνωσή τους, τα προβλήματα έχουν διατυπωθεί κατά τρόπο ώστε:

α) *Να αφήνεται, όσο είναι δυνατό, κάποια «ελευθερία δράσης» στο λύτη ή στην ομάδα των λυτών, ώστε να μπορούν να δώσουν τη δική τους ερμηνεία ή να εφαρμόσουν τη δική τους «στρατηγική», αντί να κατευθύνονται αποκλειστικά προς ένα και μοναδικό τρόπο λύσης.* (Βέβαια, όπου χρειάζεται, δίνονται κάποιες υποδείξεις και διευκρινήσεις, όπως στο Πρόβλημα Β6, όπου τα παιδιά αντιμετωπίζουν μια νέα και αρκετά σύνθετη για τις εμπειρίες τους κατάσταση). Και

β) *Να σκοπεύουν περισσότερο στην ενεργοποίηση της «ενόρασης» (διαισθητικής σκέψης) των μαθητών, παρά στην απόκτηση ή την αξιολόγηση της κατοχής στοιχειωδών γνώσεων και ικανοτήτων.*

Ειδικότερα: Με τα προβλήματα Β1 και Β2 επιδιώξαμε, από το ένα μέρος να εξοικειωθούν οι μαθητές στην πιο απλή «τεχνική» της γραφικής παράστασης (απόκτηση στοιχειωδών γνώσεων και ικανοτήτων) που θα ήταν απαραίτητη για την επεξεργασία συνθετότερων προβλημάτων, και από το άλλο να ενεργοποιηθεί η διαισθητική τους σκέψη με την προσπάθεια να παρατηρήσουν και να διατυπώσουν κάποια κανονικότητα απ' το σχήμα (Πρόβλ. Β2). Με τα προβλήματα Β3 και Β4 μπαίνουμε σε νέες περιοχές —πέρα απ' τις γνωστές από προηγούμενη σχολική διδασκαλία ή απ' τα άρθρα που διαβάστηκαν από το περιοδικό— εκεί όπου βρίσκεται ο κύριος στόχος της έρευνάς μας, όπως αναλύθηκε πιο πάνω (Εισαγωγή και § 1). Ιδιαίτερα, το Β3 αφορά την επινόηση του «πίνακα διπλής εισόδου» για να οριστούν διάφορες διμελείς πράξεις μέσα σ' ένα πεπερασμένο σύνολο, ενώ το Β4 τη χρήση πίνακα διπλής εισόδου για την εποπτική παράσταση μιας διμελούς σχέσης από την κοινωνική ζωή. Το Β5 αποσκοπούσε σε μια απλή εφαρμογή του ίδιου πίνακα στην καθημερινή ζωή του σχολείου, που υποβάλλει έντονα την ιδέα του καρτεσιανού γινομένου δύο διαφορετικών μεταξύ τους συνόλων. Τέλος, με τα προβλήματα Β6 και Β7 θελήσαμε να ενθαρρύνουμε τα παιδιά να εφαρμόσουν τις ήδη αποκτημένες, «φρέσκιες» γνώσεις τους στις συναρτήσεις και γραφ. παραστάσεις σε καταστάσεις λίγο πιο σύνθετες από τα αρχικά απλά παραδείγματα που τους δώσαμε λυμένα μέσα απ' το περιοδικό, δίνοντάς τους, επιπλέον, και κάποια κατεύθυνση και βοήθεια.

3. Ο ακριβής τρόπος διεξαγωγής του πειράματος

Δουλέψαμε με το τμήμα Β4 του τότε 34ου Γυμνασίου Θεσσαλονίκης. Το πείραμα ξεκίνησε με την αμηχανία που δημιουργεί το άγνωστο —στη συγκεκριμένη περίπτωση η ύλη των μαθηματικών για την οποία, όπως αναφέρθηκε πιο πάνω, οι μαθητές είχαν μια πολύ γενική εικόνα— και εξελίχτηκε σε τρία στάδια: Στο *πρώτο στάδιο* καθένας από τους 30 μαθητές του τμήματος εργάστηκε μόνος του σε ένα χρονικό διάστημα δέκα ημερών (στις ελεύθερες ώρες του). Το αποτέλεσμα της εργασία του παραδόθηκε επώνυμα στο μαθητικό συμβούλιο της τάξης του. Η επωνυμία είχε σαν σκοπό να τονώσει την προσωπικότητα και το αίσθημα ευθύνης του κάθε μαθητή.

Στο *δεύτερο στάδιο* και με ευθύνη του μαθητικού συμβουλίου, το τμήμα χωρίστηκε σε πέντε ομάδες των έξη μαθητών. Κάθε ομάδα επέλεξε με δικό της τρόπο έναν εκπρόσωπο και επακολούθησε συζήτηση των εργασιών των μελών της. Ο εκπρόσωπος κατάγραφε την άποψη ή τις απόψεις (εφόσον υπήρχαν περισσότερες από μία) των μελών της ομάδας του και τη (τις) μετάφερε, γραπτά και επώνυμα, πάλι στο μαθητικό συμβούλιο της τάξης.

Στο *τρίτο στάδιο,* οι εκπρόσωποι των ομάδων σε κοινή συνάντηση, συζήτησαν τις απόψεις των ομάδων τους. Στο στάδιο αυτό, διαμορφώθηκε η τελική απάντηση του τμήματος και καταγράφτηκαν ορισμένες αποκλίσεις. Στη συνέχεια, άρχισε η διαδικασία της διδασκαλίας της αντίστοιχης ύλης, με την οποία είχαν ασχοληθεί οι μαθητές. Αφού συμπληρώθηκε και η διδασκαλία της ύλης και αφομοιώθηκαν οι σχετικές έννοιες από τους μαθητές, έγινε και μια συζήτηση με τον καθηγητή, που αφορούσε τις απόψεις που είχαν διατυπωθεί και καταγραφεί.

Υπάρχουν βέβαια, κάποιες τεχνικές ελλείψεις στον πιο πάνω τρόπο «καταγραφής» της συζήτησης: η συζήτηση ούτε μαγνητοφωνήθηκε ούτε βιντεοσκοπήθηκε, παρά μονάχα οι ίδιοι οι μαθητές —ευτυχώς πολύ ευσυνείδητα— κατάγραψαν τα αποτελέσματα και των τριών σταδίων του πειράματος. Όπως θα δούμε αμέσως, από την ανάλυση αυτών των αποτελεσμάτων προκύπτουν μερικά ενδιαφέροντα συμπεράσματα.

4. Τα ειδικότερα αποτελέσματα και η ανάλυσή τους*

Στο πρόβλημα **Β1** (διατεταγμένα ζεύγη) σχεδόν όλες οι ομάδες κατάληξαν σε γραφικές παραστάσεις στο επίπεδο. Επιπλέον μια ομάδα από

* Βλ. σχετ. το Παράρτημα Γ για τις αυθεντικές απαντήσεις των παιδιών.

κορίτσια δεν περιορίστηκε απλά στις γραφικές παραστάσεις, αλλά ακολουθώντας το παράδειγμα του «Σκεφτείτε και απαντείστε», προχώρησε και στις μαθηματικές εκφράσεις (Παράρτημα Γ, αρχή). Το γεγονός ότι οι κοπέλλες της ομάδας αυτής δεν κατόρθωσαν να διακρίνουν την ειδική περίπτωση ψ=2 δείχνει το διαισθητικό χαρακτήρα των απαντήσεων. Αξιοσημείωτο είναι το γεγονός ότι στο τελικό στάδιο εγκαταλείφθηκε η μαθηματική έκφραση και η συλλογική άποψη εξαντλήθηκε στις *γραφικές παραστάσεις* των διατεταγμένων ζευγών, πράγμα που δείχνει τη δύναμη της οπτικής έκφρασης της μαθηματικής σχέσης απέναντι στους μαθηματικούς τύπους.

Στο πρόβλημα Β2 οι μαθητές έδωσαν εμπειρικά τις σωστές λύσεις. Στη διατύπωση των απαντήσεων (Παράρτημα Γ) υπάρχει σύγχυση ανάμεσα στις συντεταγμένες ενός σημείου και στις συντεταγμένες των προβολών του.

Στο πρόβλημα Β3 οι περισσότερες ομάδες «διάβασαν» σωστά τους πίνακες (1) και (2) και «διάκριναν» τη χρησιμότητά τους (ότι μπορούν να κάνουν «αυτόματα» μαθηματικές πράξεις). Μια ομάδα μάλιστα (η ομάδα 4, Παράρτημα Γ) *είδε τους πίνακες αυτούς σαν πίνακες διπλής χρήσης* (πρόσθεσης και αφαίρεσης για τον πίνακα (1), πολλαπλασιασμού και διαίρεσης για τον πίνακα (2)). Πολλοί μαθητές προσπάθησαν με την ίδια λογική (δηλ. ότι και οι επόμενοι πίνακες θα είχαν την ίδια χρήση) να «διαβάσουν» και τους πίνακες (3) και (4). Παρόλα αυτά δύο ομάδες κατόρθωσαν διαισθητικά να διακρίνουν ιδιότητες των διμελών πράξεων στους πίνακες αυτούς.

Στο πρόβλημα Β4, τα παιδιά αναζήτησαν ασυναίσθητα τις προεκτάσεις του θέματος στο κοινωνικό επίπεδο, χρησιμοποιώντας διμελείς σχέσεις γνωστές όχι μέσα από κάποια διδασκαλία, αλλά βγαλμένες από την καθημερινή εμπειρία.

Στο πρόβλημα Β5 (κατασκευή πίνακα διπλής εισόδου) γενικά τα παιδιά ακολούθησαν τη γνωστή «συνταγή» —γνωστή από διάφορες τέτοιες εικόνες, σταυρόλεξα κλπ.— του «μαυρίσματος» των τετραγώνων —θέσεων του πίνακα που αντιστοιχούν στα ζεύγη ημερών-μαθημάτων. Αλλά είναι ενδιαφέρον το ότι μερικά παιδιά έγραψαν μέσα σε κάθε τετράγωνο τις «συντεταγμένες» του (όπως Αγγλ.-Δευτ., Μαθ.-Τρίτη, κ.λ.π., βλ. *Παράρτημα Γ*).

Στο πρόβλημα Β6, όπως αναφέρθηκε στην § 2, είχαμε ήδη βοηθήσει τα παιδιά μέσω του περιοδικού, δίνοντάς τους έτοιμη τη γραφική παράσταση. Έτσι δεν δυσκολεύτηκαν να δώσουν μια απάντηση στο «καυτό» μαθηματικοποιημένο αυτό πρόβλημα — αρχικά τουλάχιστον ο καθένας από την «οπτική γωνιά» του δικού του συμφέροντος, όπως δείχνουν οι ατομικές λύσεις των μαθητών *στο 1ο στάδιο (Παράρτ. Γ). Στο 2ο και 3ο στάδιο* δόθηκαν οι «αντικειμενικές» ή «ολικές» λύσεις, οπότε η αρχική «εγω-κεντρική» αντίληψη άλλαξε (μετασχηματίστηκε) μέσα από τη συζήτηση στις ομάδες.

Στο πρόβλημα Β7, και ιδιαίτερα στον τρόπο κατασκευής του πίνακα τιμών της συνάρτησης (μονάδες ▶ κόστος), παρουσιάστηκε μια ενδιαφέρουσα διεργασία, για τη διαμόρφωση της «πιο κατάλληλης» (από μαθηματικής πλευράς) λεκτικής διατύπωσης του «νόμου» της αντιστοιχίας, που θα οδηγούσε στην εύρεση του τύπου της συνάρτησης και στη γραφική παράσταση. Στο Παράρτημα Γ φαίνεται μια σαφής διαφορά ανάμεσα στα σχετικά αποτελέσματα δύο ομάδων.

5. *Γενικά συμπεράσματα*

Ι) *Στο επίπεδο του μαθηματικού περιεχομένου:*

Διαπιστώθηκε ότι γενικά τα παιδιά μπορούν, μέσα από μια τέτοια διαδικασία ομαδικής συνεργασίας, να φτάσουν σε κάποιες επεκτάσεις ιδεών και μεθόδων, ενεργώντας αυθόρμητα, φυσικά και δημιουργικά. Επομένως, αν βρίσκει κανείς πως οι γενικές μαθηματικές ιδέες του διατεταγμένου ζεύγους, καρτεσιανού γινομένου και σχέσης αξίζει να συμπεριληφθούν σ' ένα αναλυτικό πρόγραμμα για το Γυμνάσιο, μπορεί να τις συμπεριλάβει όχι σαν «συνήθεις» μαθηματικές έννοιες με ιδιαίτερη αναφορά, ορολογία, συμβολισμό κ.λ.π. αλλά σαν κατάλληλα επιλεγμένη *μαθηματική δραστηριότητα* (προβλήματα, συζητήσεις πάνω σε αριθμητικά και άλλα δεδομένα κ.λ.π.) που έχει στόχο την ασυναίσθητη γένεση και επέκταση αυτών των ιδεών στα παιδιά.

ΙΙ) *Στο επίπεδο της αλληλεπίδρασης μεταξύ των μαθητών:*

Με τον τρόπο που υλοποιήθηκε η πιο πάνω ομαδική συνεργασία, φάνηκε ότι οι διαισθητικές αντιλήψεις των μαθητών πάνω στο συγκεκριμένο μαθηματικό περιεχόμενο είναι δυνατό να έρθουν *ευκολότερα* έτσι στο φως (παρά με το συνηθισμένο τρόπο διδασκαλίας ή επίλυσης προβλημάτων, όπου οι μαθητές δεν επικοινωνούν μεταξύ τους πάνω στο γνωστικό περιεχόμενο). Ακόμα φάνηκε ότι οι αντιλήψεις αυτές —έστω και με κάποια μικρή ή μεγάλη δυσκολία— είναι δυνατό να *αλλάξουν* κατά τη συζήτηση μέσα στην ομάδα (2ο στάδιο) ή κατά την τελική συζήτηση των εκπροσώπων (3ο στάδιο), αν και δεν είναι σίγουρο ότι τα παιδιά πείθονται από τα ίδια τα πράγματα ή από το «κύρος» των περισσότερο «μαθηματικά προχωρημένων» συμμαθητών τους. Από καθαρά παιδαγωγική άποψη, πάντως, είναι ενδιαφέρον το ότι τα παιδιά επέμειναν στο να διατυπώνεται, κάθε φορά, η άποψη ή η λύση που μειοψήφισε (βλ. Παράρτημα Γ) γιατί έτσι φαίνεται να καλλιεργείται η στάση του σεβασμού της δουλειάς και της γνώμης των άλλων.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Α΄

Η πρώτη σελίδα από καθένα απ᾿ τα δύο ειδικά άρθρα του «Ευκλείδη α» που χρησιμοποιήθηκαν.

Β΄ Τάξη

Συντεταγμένες

Π. Κυράνας

Προσδιορισμός μιας θέσης σε μια περιοχή

Δύο φίλοι, ο Γιάννης και η Κατερίνα, βρίσκονται σ᾽ ένα μικρό απόμακρο νησί με τους γονείς τους για διακοπές. Σε μια στιγμή, όπως συζητούν, λέει ο Μπαμπάς της Κατερίνας: Το πρωί πριν ξυπνήσετε έκρυψα σ᾽ ένα σημείο κάτω από την άμμο ένα χιλιάρικο· εάν το βρείτε, είναι δικό σας.

Παιδιά: (Αφού σκέφτηκαν λίγο). Μα θα πρέπει να ψάξουμε ολόκληρη την περιοχή και αυτό είναι αδύνατο.

Μπαμπάς (της Κατερίνας): Θα σας βοηθήσω· ξέρετε πού είναι τα τέσσερα σημεία του ορίζοντα;

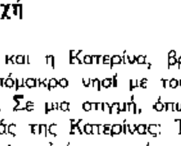
Παιδιά: Ναι, μα τί σχέση έχει αυτό;

Μπαμπάς: Πάρτε αυτό το χαρτί διαβάστε το και κάντε ακριβώς ότι λέει.

Παιδιά: Διαβάζουν το χαρτί που γράφει:

Πεύκο καμμένο από κεραυνό, (5 mΔ, 2 mN).

Δηλαδή: Πηγαίνετε από το πεύκο ***πρώτα*** 5 μέτρα δυτικά, ***μετά*** 2 μέτρα νότια. Στο σημείο αυτό θα σκάψετε και θα βρείτε τα χρήματα.



① **Πευκο καμενο απο κεραυνό, (5mΔ,2mN)**

Παιδιά: Χρειαζόμαστε και ένα μέτρο.

Μπαμπάς: Ωραία παιδιά, το μέτρο είναι απαραίτητο, ορίστε και ένα μέτρο.

Παιδιά: (Μετά από ώρα επιστρέφουν):

Τα βρήκαμε!

Μπαμπάς: Μπράβο παιδιά, τα χρήματα κρατείστε τα, είναι δικά σας! Θέλω μονάχα να μου εξηγήσετε, πώς ακριβώς δουλέψατε.

Κατερίνα: Να σου πω Μπαμπά: Αφού βρήκαμε το καμμένο πεύκο, εγώ στάθηκα στο σημείο που είναι το πεύκο κοιτάζοντας το βορρά και άνοιξα τα χέρια μου, οπότε το δεξί χέρι έδειχνε την ανατολή και το αριστερό τη δύση.

Γιάννης: Εγώ βλέποντας την Κατερίνα χάραξα δυο γραμμές πάνω στην άμμο. Η μία από την Ανατολή προς τη Δύση και η άλλη από το Βορρά προς το Νότο, οι οποίες περνούσαν από το πεύκο. Κατόπιν χρησιμοποιήσαμε το μέτρο και ακολουθήσαμε τις οδηγίες που μας είχες γραμμένες. Έτσι πέσαμε ακριβώς στο σημείο που είχες κρύψει τα χρήματα.

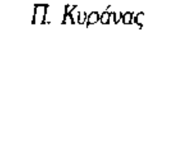
Μετά απ᾽ αυτή τη μικρή ιστορία μπορούμε να βγάλουμε μερικά ***συμπεράσματα***.

- Τα παιδιά έπρεπε να βρούνε ένα ***σημείο***, στο οποίο ήταν κρυμένα τα χρήματα.
- Ποιες ήταν εκείνες οι πληροφορίες που βοήθησαν για να βρεθεί το σημείο;

i) Το πεύκο, ένα αρχικό σημείο ***Ο*** από το οποίο ξεκίνησαν.

ii) Δύο ευθείες κάθετες μεταξύ τους, που μας δίνουν τις διευθύνσεις: «Ανατολή-Δύση» και «Βορράς-Νότος».

iii) Το μέτρο.



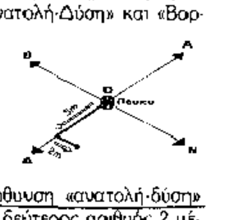
iv) *Ένα ζεύγος αριθμών* π.χ. (5 mΔ, 2 mN) όπου ο πρώτος αριθμός δείχνει ότι κινήθηκαν από το σημείο ***Ο πρώτα*** 5 μέτρα κατά τη διεύθυνση «ανατολή-δύση» με φορά προς τη Δ και ο δεύτερος αριθμός 2 μέτρα στη διεύθυνση «βορράς-νότος» με φορά προς το Ν.

Θα χρησιμοποιήσουμε τώρα τα συμπεράσματα που μας έδωσε το πιο πάνω συγκεκριμένο παράδειγμα για να λύσουμε και άλλα παρόμοια προβλήματα.

Συντεταγμένες ενός σημείου

Πρόβλημα: Πώς μπορούμε να περιγράψουμε τη θέση ενός σημείου Α που βρίσκεται πάνω σ᾽ ένα επίπεδο (π.χ. στην επιφάνεια ενός φύλλου του τετράδιού μας) με τη βοήθεια δυο αριθμών;

Λύση: Σχεδιάζουμε στο τετράδιό μας δυο ευθείες κάθετες μεταξύ τους τις x΄x και y΄y, που τις λέμε ***άξονες***. Οι άξονες αυτοί τέμνονται στο σημείο ***Ο*** που το λέμε και ***αρχή των αξόνων***. Ακόμα διαλέγουμε ένα μήκος κατάλληλο που θα μας χρησιμεύει σαν ***μονάδα μέτρησης***



Β' Τάξη   αντιστοιχίες — συναρτήσεις

Παναγιώτης Κυράνας   Τάσος Πατρώνης

Πρόβλημα 1 Η επιφάνεια ενός φύλλου λαμαρίνας έχει εμφαδό $1m^2$, και ζυγίζει 50 κιλά (kg). Για να κατασκευάσει ένας βιοτέχνης διάφορα αντικείμενα κόβει τα φύλλα λαμαρίνας σε μικρότερα κομμάτια με εμβαδό $70dm^2$, $50\ dm^2$, $30\ dm^2$, $20\ dm^2$,... κ.λ.π. Πόσο ζυγίζει κάθε κομμάτι;

Λύση Ο βιοτέχνης με απλή μέθοδο των τριών βρίσκει ότι τα $70\ dm^2$ ζυγίζουν 35 kg, τα $50\ dm^2$ ζυγίζουν 25 kg κ.λ.π. Για διευκόλυνσή του σχηματίζει ένα πίνακα με δύο στήλες στη μία στήλη γράφει το εμβαδό κάθε κομματιού και στην άλλη το αντίστοιχο βάρος, όπως βλέπετε στον πίνακα (Α).

1η στήλη Επιφάνεια x dm^2	Α	2η στήλη Βάρος kg
100		50
70		35
50		25
30		15
20		10
.		.
.		.
.		.

Παρατηρώντας τον πίνακα (Α) διαπιστώνουμε ότι σε κάθε μέγεθος λαμαρίνας αντιστοιχεί ένα ορισμένο βάρος. Ένας τέτοιος πίνακας μας δίνει μία ***αντιστοιχία*** μεταξύ των τιμών του μεγέθους «Επιφάνεια» και των τιμών του μεγέθους «Βάρος». Έτσι εδώ έχουμε την αντιστοιχία:

Επιφάνεια → Βάρος
(Λαμαρίνας)   (Λαμαρίνας)

Μελετώντας τώρα προσεκτικά τον πίνακα (Α) συμπεραίνουμε ότι: α) Σε κάθε τιμή από τη 1η στήλη αντιστοιχεί ***μία μόνο*** τιμή από τη 2η στήλη, π.χ. στην τιμή 100 της 1ης στήλης αντιστοιχεί ***μόνο*** η τιμή 50 της 2ης στήλης (100 → 50), στην τιμή 20 της 1η στήλης αντιστοιχεί ***μόνο*** η τιμή 10 της 2ης στήλης (20 → 10) κ.λ.π.

β) Η μεταβολή του ενός μεγέθους προκαλεί και τη μεταβολή του άλλου μεγέθους και μάλιστα με κάποιο ***σταθερό κανόνα*** (νόμο) που μπορούμε (στο συγκεκριμένο πρόβλημα) να τον διατυπώσουμε με μαθηματικό τρόπο.

Ας δούμε λοιπόν πώς αυτός ο κανόνας διατυπώνεται με μαθηματικό τρόπο. Από τον πίνακα παρατηρούμε ότι το 50 (της 2ης στήλης) βρίσκεται από το 100 όταν πολλαπλασιασθεί

με το $$\frac{50}{100} = 0{,}5$$

1η στήλη x	2η στήλη y
100	$50 = 0{,}5 \cdot 100$
70	$35 = 0{,}5 \cdot 70$
50	$25 = 0{,}5 \cdot 50$
30	$15 = 0{,}5 \cdot 30$
20	$10 = 0{,}5 \cdot 20$
.	. .
.	.
.	.
x	$y = 0{,}5 \cdot xy$

Το 35 (της 2ης στήλης) βρίσκεται από το 70 όταν πολλαπλασιασθεί με το 0,5... και ***γενικά***

Το y βρίσκεται όταν το x πολλαπλασιασθεί με το 0,5 δηλαδή

$\boldsymbol{y = 0{,}5 \cdot x}$ όπου x τιμή της 1ης στήλης και y η αντιστοιχή της τιμή της 2ης στήλης του πίνακα. Η ισότητα $y = 0{,}5 \cdot x$ είναι ο μαθηματικός τρόπος με τον οποίο διατυπώνεται ο κανόνας.

Πρόβλημα 2.

Ένας ορειβάτης για την κατάκτηση της κορυφής του Έβερεστ ανεβαίνει κάθε μέρα και ένα ορισμένο ύψος όπως βλέπετε στον πίνακα (Β).

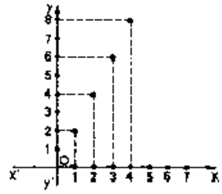
1η στήλη ημερομηνία	(Β) 2η στήλη ύψος m
1η μέρα / 5-6-1974	500
2η μέρα / 6-6-1974	100
3η μέρα / 7-6-1947	150
4η μέρα / 8-6-1947	70
5η μέρα / 9-6-1947	.
.	.
.	.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Β΄

Τα προβλήματα που δόθηκαν μέσα από τις στήλες του «Ευκλείδη α»

B_1. Παίρνουμε τα **διατεταγμένα** ζεύγη (1, 2), (2, 4), (3, 6), (4, 8),... **Ας βρούμε** τα σημεία του επιπέδου που **αντιστοιχούν σ' αυτά τα ζεύγη:**

Όπως βλέπετε, τα σημεία αυτά βρίσκονται επάνω σε μία ευθεία γραμμή. Ακόμα παρατηρούμε οτι η 2η συντεταγμένη σ' όλα τα ανωτέρω ζεύγη είναι διπλάσια από την 1η συντεταγμένη: Αν παραστήσουμε, όπως ξέρουμε, την 1η συντεταγμένη με x και τη 2η συντεταγμένη με y, τότε μπορούμε να εκφράσουμε γενικά μ' ένα μαθηματικό τύπο τη σχέση των συντεταγμένων των σημείων αυτών ως εξής:

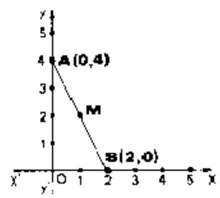


$$y = 2 \cdot x$$

Μπορείτε να κάνετε την ίδια εργασία όπως παραπάνω για τα επόμενα διατεταγμένα ζεύγη;

i) (1,3), (2, 6), (3, 9), (4, 12), ...
ii) (2, 1) (4, 2), (6, 3), (8, 4), ...
iii) (1, 2), (2, 2), (3, 2), (4, 2), ...
iv) (1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), ...

B_2. Όπως βλέπετε στο σχήμα τα άκρα του ευθυγράμμου τμήματος ΑΒ έχουν συντεταγμένες Α (0, 4) και Β (2, 0). Μπορείτε να βρείτε τις συντεταγμένες του μέσου Μ του ευθυγρ. τμήματος ΑΒ; Ποια σχέση παρατηρείτε ανάμεσα στις συντεταγμένες του μέσου Μ και τις συντεταγμένες των άκρων του τμήματος;



B_3. Στα χειρόγραφα ενός μαθηματικού από την εποχή της Αναγέννησης βρέθηκαν οι αριθμητικοί πίνακες που βλέπετε. Μπορείτε να τους «διαβάσετε»; Δηλ. μπορείτε να εξηγήσετε πως ο μαθηματικός αυτός συμπλήρωσε τους πίνακες;

Πίνακας 1

	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

Πίνακας 2

	1	2	3	4	5	6
1	1	2	3	4	5	6
2	2	4	6	8	10	12
3	3	6	9	12	15	18
4	4	8	12	16	20	24
5	5	10	15	20	25	30
6	6	12	18	24	30	36

Πίνακας 3

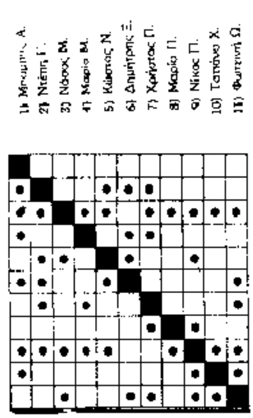
	1	2	3	4	5	0
1	2	3	4	5	0	1
2	3	4	5	0	1	2
3	4	5	0	1	2	3
4	5	0	1	2	3	4
5	0	1	2	3	4	5
0	1	2	3	4	5	0

Πίνακας 4

	1	2	3	4	5	0
1	1	2	3	4	5	0
2	2	4	0	2	4	0
3	3	0	3	0	3	0
4	4	2	0	4	2	0
5	5	4	3	2	1	0
0	0	0	0	0	0	0

B4. Κάποτε σ' ένα διαγωνισμό απ' όλη τη χώρα πέτυχαν 11 μαθητές και μαθήτριες. Το βραβείο ήταν να πάνε όλοι μαζί διακοπές με τα έξοδα πληρωμένα. Στο τέλος των διακοπών και πριν χωριστούνε, τα παιδιά σκέφτηκαν να κάνουν ένα πείραμα. Έγραψαν τα ονοματεπώνυμά τους με αλφαβητική σειρά, οριζόντια και κατακόρυφα σ' ένα πίνακα με 11 γραμμές και 11 στήλες. Στη συνέχεια, καθένας πήγαινε στον πίνακα και, στην οριζόντια γραμμή που αντιστοιχούσε στ' όνομά του «σημείωνε» εκείνους που είχε συμπαθήσει περισσότερο και ήθελε τη φιλία τους: για καθέναν που συμπαθούσε, έβαζε μια τελεία στο τετράγωνο που αντιστοιχούσε στην κατακόρυφη στήλη του ονόματός του. Π.χ. ο Κώστας Ν. συμπαθούσε περισσότερο τη Ντέπη Γ., το Νάσο Μ., το Δημήτρη Ξ. και το Νίκο Π., κι έβαλε τελείες στις στήλες τους. Έτσι συμπληρώθηκε ο πίνακας όπως φαίνεται πιο κάτω.

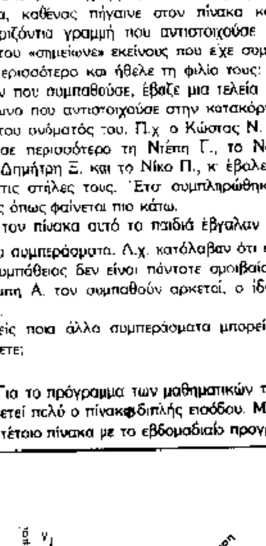
1) Μπάμπης Α.
2) Ντέπη Γ.
3) Νάσος Μ.
4) Μαρία Μ.
5) Κώστας Ν.
6) Δημήτρης Ξ.
7) Χρήστος Π.
8) Μαρία Π.
9) Νίκος Π.
10) Τατιάνα Χ.
11) Φωτεινή Ω.



Από τον πίνακα αυτό τα παιδιά έβγαλαν ορισμένα συμπεράσματα. Λ.χ. κατάλαβαν ότι η σχέση συμπάθειας δεν είναι πάντοτε αμοιβαία: τον Μπάμπη Α. τον συμπαθούν αρκετοί, ο ίδιος όμως...

Εσείς ποια άλλα συμπεράσματα μπορείτε να βγάλετε;

B5. Για το πρόγραμμα των μαθηματικών του σχολείου σας εξυπηρετεί πολύ ο πίνακας διπλής εισόδου. Μπορείτε να κάνετε ένα τέτοιο πίνακα με το εβδομαδιαίο προγραμμά σας;



B6. Πρόβλημα: Ο καθηγητής των μαθηματικών για να δοκιμάσει τις αντιδράσεις των μαθητών του και για να διαπιστώσει αν καταλάβουν τη σημασία των γραφικών παραστάσεων στη λύση προβλημάτων, έκανε δύο προτάσεις...

α) Να ανεβάσει όλους τους βαθμούς κατά 10%

β) Οι βαθμοί κάτω του 13 να γίνουν 13 και άλλοι βαθμοί να μείνουν αμετάβλητοι:

Ποιους μαθητές συμφέρει η (α) πρόταση και ποιους η (β);

Υπόδειξη για τη λύση:

Κάνουμε τη γραφική παράσταση και των δύο προτάσεων (που είναι αντιστοιχίες) στους ίδιους ορθογώνιους άξονες, όπως βλέπετε στο σχήμα (γ).

Και τώρα τη λύση θα τη δώσετε εσείς μελετώντας και συγκρίνοντας τις γραφικές παραστάσεις του σχήματος (γ), κάνοντας σε μιλιμετρέ χαρτί τις ίδιες γραφικές παραστάσεις με μεγάλη ακρίβεια.

Διευκρίνηση: Ο βαθμός 17 με την (α) πρόταση δηλ. με την αύξηση 10% γίνεται 18,7. Σε τέτοιες περιπτώσεις που το δεκαδικό ψηφίο είναι μεγαλύτερο ή ίσο με το 5 θα στρογγυλεύετε τον αριθμό προς τα πάνω, ενώ όταν το δεκαδικό ψηφίο είναι μικρότερο του 5 θα τον στρογγυλεύετε προς τα κάτω. π.χ. το $17 - 18{,}7 \simeq 19$, το $15 \rightarrow 16{,}5 \simeq 17$ το $14 \rightarrow 15{,}4 \simeq 15$.

Παρατηρήσεις: Εδώ συμφέρει η γραφική παράσταση διότι παρουσιάζει τα εξής πλεονεκτήματα:

1) Γνωρίζουμε ότι κάθε ζεύγος αντιστοίχων μεγεθών (διατεταγμένο ζεύγος) παριστάνεται με τη βοήθεια των ορθογωνίων αξόνων μ' ένα μοναδικό σημείο. Και επειδή μια γραμμή έχει άπειρα σημεία, μπορούμε να παριστάνουμε άπειρα ζεύγη. Αυτό δεν είναι δυνατό να γίνει με τους πίνακες ή τα βελοειδή διαγράμματα.

2) Μπορούμε να παραστήσουμε στο ίδιο ορθογώνιο σύστημα περισσότερα από μία αντιστοιχίες (όπως κάναμε στο πρόβλημά μας). Μ' αυτό τον τρόπο τις *συγκρίνουμε* με μεγάλη ευκολία.

Προβλήματα που προτείνουμε

B7. Τα πάγια τέλη στο λογαριασμό τηλεφώνου είναι 500 δρχ. το δίμηνο. Κάθε μονάδα σε μια τηλεφωνική συνδιάλεξη χρεώνεται 3 δρχ. Φτιάξτε ένα πίνακα με τα έξοδα τηλεφώνου, όταν έχουν γίνει συνδιαλέξεις με 5, 10, 15, ... 40 μονάδες.

α) Είναι η αντιστοιχία

Μονάδες — Κόστος

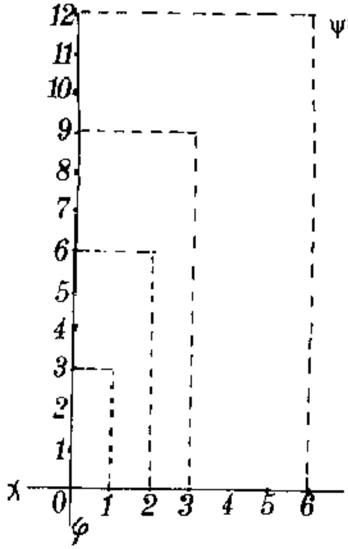
συνάρτηση; και αν ναι, τότε ποιος είναι ο τύπος αυτής της συνάρτησης;

β) Κάντε τη γραφική παράσταση της πιο πάνω αντιστοιχίας.

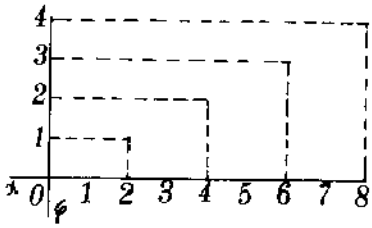
ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Γ΄

Από τις αυθεντικές απαντήσεις ομάδων και μεμονωμένων μαθητών του τμήματος B_4

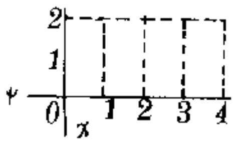
ΟΜΑΔΑ 2η (2ο στάδιο)



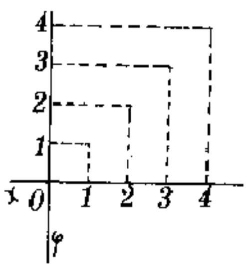
$\psi=3\cdot x$



$x=2\cdot\psi$



$\psi=2\cdot x$



$x=\psi$

Άσκηση Β2 (Τελ. στάδιο)

Η *1η, 2η και 3η ομάδα συμφωνεί στο ότι το συμπέρασμα που βγαίνει* είναι: Οι συντεταγμένες (0,4) και (2,0) είναι διπλάσιες από το (0,2), (1,0).

Οι ομάδες 4η και 5η δεν την έλυσαν.

Άσκηση Β3

Η 1η, 2η, και 3η ομάδα λέει ότι στον πρώτο πίνακα γίνεται πρόσθεση και στο δεύτερο πολλαπλασιασμός.

Η 4η και 5η ομάδα λένε ότι στον πρώτο πίνακα γίνεται πρόσθεση και αφαίρεση. Για τον δεύτερο πίνακα η 4η λέει ότι γίνεται πολλαπλασιασμός και η 5η δεν τον έκανε.

Για τον τρίτο πίνακα η 1η ομάδα λέει ότι μέχρι εκεί που σχηματίζεται η διαγώνιος των μηδενικών γίνεται πρόσθεση και ότι μετά από αυτή οι αριθμοί δεν δίνουν σωστό αποτέλεσμα όμως ότι αν προσθέσεις ή αφαιρέσεις τους αριθμούς της οριζόντιας και το μηδέν της κάθετης στήλης τότε βγαίνει σωστό αποτέλεσμα.

Η 2η ότι οι αριθμοί (1, 2, 3, 4, 5, 0) ακολουθεί ο ένας τον άλλο διαδοχικά διαγώνια.

Η 3η λέει ότι γίνεται πρόσθεση κι αφαίρεση. Η 4η λέει ότι οι αριθμοί (1, 2, 3, 4, 5, 0) ακολουθούν ο ένας τον άλλο διαδοχικά.

Άσκηση Β4

ΟΜΑΔΑ 1η

Ότι για να δημιουργήσουμε σταθερές φιλίες με κάποιον άλλο πρέπει να έχουμε μερικά κοινά σημεία, π.χ. το γούστο μας να μοιάζει.

ΟΜΑΔΑ 2η

Η συμπάθεια είναι μεταξύ κοριτσιών και αγοριών περισσότερη παρότι σε αγόρια με αγόρια και η συμπάθεια μεταξύ κοριτσιών είναι ανύπαρκτη.

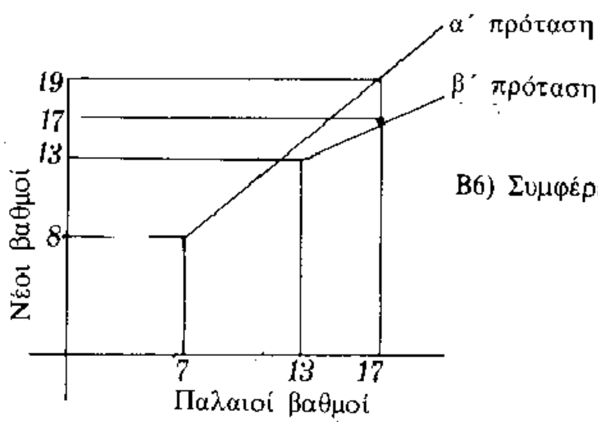
ΟΜΑΔΑ 4η

Βγάζουμε συμπέρασμα ότι ενώ άλλοι συμπαθούν πολλά παιδιά αυτούς *δεν τους συμπαθεί κανένας και το αντίθετο, και ακόμα μερικές φορές η* συμπάθεια είναι αμοιβαία.

΄Ονομα:
Τμήμα: B_4
Ημερομηνία: 3/3/86

B5) (1ο στάδιο)

Παρασ.	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
Πεμπ.	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
Τετ.	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
Τρίτη	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
Δευτ.	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
Β / Α	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]



B6) Συμφέρει η πρώτη πρόταση.

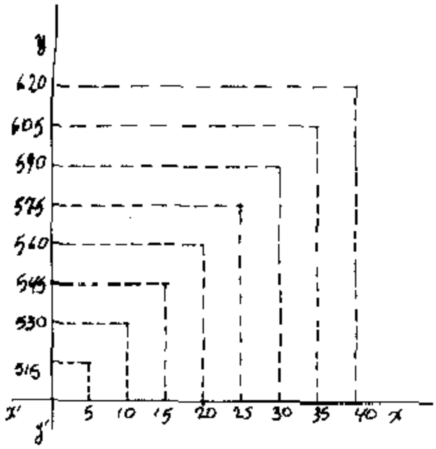
ΟΜΑΔΑ 1η (2ο στάδιο)

Β7) Σχήμα

1η στήλη Μονάδες	2η στήλη Κόστος
5	15+500=515
10	30+500=530
15	45+500=545
20	60+500=560
25	75+500=575
30	90+500=590
35	105+500=605
40	120+500=620

Πολλαπλασιάζουμε τις μονάδες με την τιμή της μονάδας π.χ. 5·3= 15+500=515.

Γραφική παράσταση



Ημ. 4-3-1986

ΟΜΑΔΑ 3η

Αρχηγός:

Β6) Πρόβλημα: Η α΄ δηλαδή να ανεβάσει όλους τους βαθμούς κατά 10% συμφέρει τους μαθητές με 13, 14, 15, 16, 17, 18 και 19, ενώ η β΄ συμφέρει στους μαθητές με 12 και κάτω. Όσοι έχουν 12 είναι το ίδιο ενώ γι' αυτούς *που έχουν 20 δεν τους συμφέρει καμία.*

Β7)

Μονάδες	Κόστος
5	15
10	30
15	45
40	120

SUMMARY

In this article we present an experimental work with problems on ordered pairs and functions, solved by groups of pupils of the 2d class of Gymnasium (13-14 years of age). The objective of this experiment was to find out whether, and in what extent, the children would be able to «transfer» the idea of an ordered pair, a relation or a function, from the simple (numerical-graphical) form on the plane –with which they were already acquainted– to more complicate situations and problems from everyday life. The results were generally positive, but the solutions and their formulations were at an intuitive level, in which graphical representations played a fundamental role; also children, working in groups, tend to «forget» the formal methematical language and use more «free» expressions in their activities.