

Μία διδακτική παρέμβαση για την ανάπτυξη ικανοτήτων αναγνώρισης κανονικοτήτων σε παιδιά προσχολικής ηλικίας

Ευαγγελία Παπαδοπούλου

1. Εισαγωγή

Η ανάπτυξη της μαθηματικής δομής στην πρώιμη αλγεβρική σκέψη και στο συλλογισμό, αποτελεί αντικείμενο συζητήσεων και μελετών, καθώς η έρευνα ανέδειξε ότι οι μαθητές που παρουσιάζουν αδυναμία στην άλγεβρα, φαίνεται να μην έχουν αναπτύξει δομικές αναπαραστάσεις στα προηγούμενα χρόνια της εκπαίδευσής τους, καθώς επικεντρώνονται σε ιδιότυπα χαρακτηριστικά και όχι στη δομή των στοιχείων.

Έτσι, στο χώρο της εκπαίδευσης και στα σύγχρονα Αναλυτικά Προγράμματα για την προσχολική και πρώτη σχολική ηλικία, εισάγεται τα τελευταία χρόνια στον τομέα των μαθηματικών, η συστηματική ενασχόληση των παιδιών με τις κανονικότητες, την εύρεση αυτών και τη δημιουργία τους, μέσα από μία ευρύτητα υλικών και δράσεων. Τα παιδιά καλούνται να αναγνωρίσουν, να περιγράψουν, να συνεχίσουν και να δομήσουν ένα δικό τους πρότυπο, δρώντας σε αντικείμενα, ή μέσα από τη χρήση λεκτικών, ρυθμικών και κινητικών κανονικοτήτων.

Υπάρχουν μελέτες για την ανάπτυξη των κανονικοτήτων στα μικρά παιδιά και για την ανάπτυξη και αποτελεσματικότητα προγραμμάτων της πρώτης σχολικής ηλικίας, που προωθούν δεξιότητες στις κανονικότητες. Οι ερευνητές υποστηρίζουν, ότι υπάρχει πραγματική ανάγκη να διεξαχθούν έρευνες που να αφορούν στη μαθηματική εκπαίδευση των παιδιών που εστιάζει στη διδασκαλία και στην ανάπτυξη των δομών και της γενίκευσής τους.

2. Θεωρητικό πλαίσιο

Αναφορικά με τη μαθηματική διάσταση του προτύπου (pattern), η Τζεκάκη το ορίζει ως «ένα σύνολο από χαρακτηριστικά που παραμένουν σταθερά μέσα σε ομάδες αριθμών, σχημάτων, μεγεθών ή άλλων μαθηματικών καταστάσεων. Στη μαθηματική εκπαίδευση προτείνεται ως εύρεση προτύπου η ανακάλυψη ηχητικών, οπτικών και κινητικών κανονικοτήτων που μπορούν να επαναλαμβάνονται, να μεγαλώνουν ή γενικότερα να σχετίζονται μεταξύ τους με έναν κανόνα» (Τζεκάκη, 2007, σελ. 251).

Οι Mulligan, Mitchelmore, & Prescott, αναφέρουν πως ένα πρότυπο μπορεί να οριστεί ως μία αριθμητική ή χωρική κανονικότητα και η σχέση ανάμεσα στα ποικίλα συστατικά της, αποτελεί τη δομή της (Mulligan et al., 2006). Για τη Fox, πρότυπο μπορεί να οριστεί κάτι που παραμένει σταθερό μέσα σε μία ομάδα αριθμών, σχημάτων ή ιδιοτήτων των μαθηματικών συμβόλων ή εννοιών (Fox, 2005). Ο Charlesworth διατύπωσε ότι πρότυπο είναι μία διαδικασία ανακάλυψης ακουστικών, οπτικών και κινητικών κανονικοτήτων, ενώ ο Burns αναφέρεται σε τρεις κατηγορίες προτύπων: στα επαναλαμβανόμενα, στα αναπτυσσόμενα (growing patterns) και στα σχεσιακά. Από αυτά, τα επαναλαμβανόμενα πρότυπα είναι αυτά που πρώτα εξερευνούν τα παιδιά (Fox, 2005). Ο Battista ορίζει ως χωρική δομή, τη νοητική οργάνωση αντικειμένων ή ομάδων αντικειμένων και των συστατικών τους (Mulligan et al., 2003).

Σε μία μελέτη των Ginsburg et al., σε αυθόρμητες δράσεις παιδιών προσχολικής ηλικίας, καταγράφηκε ότι τα παιδιά συμμετείχαν σε δραστηριότητες προτύπων στο 30% του χρόνου παρατήρησης, ποσοστό μεγαλύτερο από όλα τα άλλα είδη μαθηματικών εννοιών που λάμβαναν χώρα (Ginsburg et al., 1999). Επίσης, σε έρευνα των Τζεκάκη & Κούλελη, καταγράφηκε ότι τα μικρά παιδιά έχουν την τάση αυθόρμητα να αναγνωρίζουν και να ακολουθούν ένα πρότυπο, όμως η τάση αυτή δεν αποτελεί ουσιαστική κατανόηση του κανόνα του προτύπου, δεν αποτελεί συστηματική δράση και δεν μπορεί να αναπτυχθεί χωρίς διδακτική παρέμβαση (Τζεκάκη & Κούλελη, 2007). Μελέτη της Fox σε αυθόρμητες δράσεις των παιδιών που αφορούν πρότυπα, κατέδειξε ότι τα παιδιά εξερευνούν σε μεγαλύτερο βαθμό επαναλαμβανόμενα πρότυπα, γλωσσικά πρότυπα και τα στοιχεία από γραμμικά πρότυπα (Fox, 2005).

Κάποιοι ερευνητές εστίασαν σε στοιχεία δομικά στις κανονικότητες και υποστηρίζουν ότι τα προβλήματα που υπάρχουν στην αναγνώριση της δομής, οφείλονται σε έλλειψη αναπαραστατικών ικανοτήτων και ότι η διδασκαλία μαθηματικών προτύπων και δομών, μπορεί να βελτιώσει αποτελεσματικά τα παιδιά στην απόκτηση μαθηματικών εννοιών-κλειδιά και στην ανάπτυξη διαδικασιών μέσα σε ένα σχετικά σύντομο χρονικό πλαίσιο (Mulligan, Prescott, Papic, & Mitchelmore M, 2006).

Άλλοι ερευνητές εστίασαν στην αναπαράσταση και στις διαδικασίες συλλογισμού ολοκλήρωσης κανονικοτήτων και κατέληξαν ότι μετά από διδακτική παρέμβαση οι μαθητές γενικεύουν και συνδέουν αναπαραστάσεις (Warren, 2000) και ότι οι δυσκολίες των παιδιών προέρχονται από έλλειψη εμπειρίας στη συγκεκριμένη περιοχή και όχι από αναπτυξιακές δυσκολίες (Warren, 2005). Η οπτική αναπαράσταση ενός προτύπου βοηθά τα παιδιά στη διατύπωση μιας γενίκευσης, όπως το να προβλέψουν και να διατυπώ-

σουν τη θέση ενός χ όρου σε ένα πρότυπο, κάτι που δεν είναι ορατό από τα παιδιά κατά την λεκτική αναπαράσταση (Stalo et all., 2006).

Σε πειραματική διδασκαλία σχετικά με τη γενίκευση προτύπου, ανα-
δύθηκαν οπτικά πρότυπα (visual templates), τα οποία παρήγαγαν τουλάχισ-
τον έξι τύπους αλγεβρικού συλλογισμού (Rivera, 2010), για τους οποίους ο
Radford επισημαίνει ότι δε δημιουργούνται από όλα τα είδη προτύπων, αλ-
λά μόνο από εκείνα στα οποία η εύρεση ενός κοινού χαρακτηριστικού γενι-
κεύεται σε όλα τα μέρη της ακολουθίας και εκφράζει τον οποιοδήποτε όρο
της (Radford, 2010).

Έρευνες σε πρότυπα κατέδειξαν ότι μετά από διδακτική παρέμβαση,
τα παιδιά είναι ικανά να εκφράζουν τη σχέση ανάμεσα σε δύο σύνολα στοι-
χείων με μία πολύ αφηρημένη φόρμα (Warren, 2005) και ότι τα πρότυπα
μπορούν να λειτουργήσουν αποτελεσματικά ως γέφυρες για την εισαγωγή
στην έννοια της αναλογίας, καθώς συγκεκριμένες αναπαραστάσεις βοηθούν
τους μαθητές να αναγνωρίσουν την αναλογία και την ισοδυναμία ανάμεσα
σε συγκεκριμένες αναλογίες και να αναπαραστήσουν αυτές τις ιδέες σε ένα
αφηρημένο σημειωτικό σύστημα (Warren & Cooper, 2007).

Στην παρούσα μελέτη, ως κανονικότητα ορίζουμε επαναλήψεις ποσο-
τήτων, μεγεθών, μορφών και σχέσεων, που αποτελούν τον πυρήνα, το πιο
μικρό τμήμα μιας δομής, που επαναλαμβάνεται με βάση κάποιον κανόνα. Οι
επαναλήψεις αυτές αφορούν σε οπτικές, κινητικές και ηχητικές κανονικότη-
τες.

3. Μεθοδολογία

3.1. Δείγμα

Η ανάπτυξη της ικανότητας αναγνώρισης του κανόνα που δομεί τα στοιχεία
μιας κανονικότητας σε διαφορετικά είδη κανονικοτήτων, σε κλιμακούμενα
συνθετότερες δομές και δυσκολότερες δράσεις, εξετάστηκε σε 42 παιδιά (17
αγόρια και 25 κορίτσια), από δύο τμήματα δύο συστεγαζόμενων σχολείων
της Θεσσαλονίκης, στα οποία φοιτούν μόνο νήπια. Τα παιδιά προέρχονταν
ως επί το πλείστον από μονογονεϊκές οικογένειες, με πολύ χαμηλό ετήσιο
εισόδημα και κατοικούσαν σε διάφορες περιοχές της Θεσσαλονίκης. Αν και
η επιλογή των σχολείων δεν ακολούθησε τυπικά χαρακτηριστικά, προτιμή-
θηκαν τα συγκεκριμένα σχολεία, σε μία προσπάθεια να δούμε κατά πόσο η
διδακτική παρέμβαση για την κατανόηση κανονικοτήτων και δομών σε μα-
θηματικές καταστάσεις, θα είχε αποτέλεσμα σε παιδιά που προέρχονται από
μη προνομιούχα περιβάλλοντα. Η κατανομή των παιδιών και το φύλο, φαί-
νονται στον παρακάτω πίνακα.

Πίνακας 1:
Μαθητές και σχολεία

Σχολεία	Αγόρια	Κορίτσια	Σύνολο
Σχολείο Α	8	10	18
Σχολείο Β	9	15	24
Σύνολο	17	25	42

3.2. Δοκιμασίες

Οι γνώσεις των παιδιών σχετικά με την αναγνώριση του κανόνα που περιγράφει μία κανονικότητα, ελέγχθηκαν ατομικά, πριν και δεκαπέντε μέρες μετά το πέρας διδακτικής παρέμβασης, με τη βοήθεια 11 δοκιμασιών ανοιχτού τύπου, οι οποίες δομήθηκαν για τις ανάγκες της έρευνας αυτής. Δε δόθηκε βοήθεια στα παιδιά τόσο στο αρχικό, όσο και στο τελικό τεστ αξιολόγησης και στις περιπτώσεις που ζητήθηκε από κάποιο παιδί, δόθηκε μόνο ενθάρρυνση, όπως για παράδειγμα «ξανασκέψου το», «προσπάθησε πάλι», κ.τ.λ.

Το υλικό που χρησιμοποιήθηκε για τις περισσότερες δοκιμασίες, είναι υλικό του Ο.Σ.Κ. (Οργανισμός Σχολικών Κτηρίων) και βρίσκεται σε όλα τα νηπιαγωγεία, ενώ ένα μικρό μέρος του κατασκευάστηκε.

Οι δοκιμασίες στόχευαν να εξετάσουν τα παιδιά σε τρεις μεταβλητές των κανονικοτήτων: στο είδος των κανονικοτήτων, στο είδος της δομής και στο είδος της δράσης των παιδιών. Η σειρά με την οποία δόθηκαν οι δραστηριότητες στα παιδιά, ήταν κλιμακούμενης δυσκολίας. Αναφορικά με το είδος της κανονικότητας, τα παιδιά εξετάστηκαν στα είδη: χρωματική, γεωμετρική, ποσοτική, μεγεθών και αλγοριθμική. Σχετικά με τη δομή στα είδη: *ABΓ*, *AABB*, *AABΓ*, *ABΓΓ*, *ABBG*, *1,2,3,4,5*, και *2,4,6,8,10*. Σχετικά με τη δράση στα είδη: συνέχιση κανονικότητας, συμπλήρωση κανονικότητας, συμπλήρωση στοιχείου που λείπει, βρίσκουν το λάθος σε μία κανονικότητα, αντιγράφουν τον κανόνα σε διαφορετικό υλικό, βρίσκουν τη σωστή από τις προτεινόμενες κανονικότητες, επεκτείνουν μία αλγοριθμική κανονικότητα και δομούν τη δική τους κανονικότητα.

3.3. Διδακτική παρέμβαση

Παρόλο που η διδακτική παρέμβαση δεν παρουσιάζεται συστηματικά στην παρούσα έρευνα, θεωρούμε ότι πρέπει να αναφερθούμε συνοπτικά στην εφαρμογή της, ώστε να κατανοήσουμε καλύτερα τις επιδόσεις των παιδιών στις δοκιμασίες, μετά το πέρας της παρέμβασης.

Στη διδακτική παρέμβαση που σχεδιάσαμε έγινε μία προσπάθεια ανάπτυξης της ικανότητας των παιδιών να αναγνωρίζουν και να περιγράφουν μία κανονικότητα, να αναλύουν τα στοιχεία της, να κατανοούν τις μεταξύ τους σχέσεις και της ύπαρξης ενός κανόνα που οργανώνει τα στοιχεία της και επαναλαμβάνεται. Περιελάμβανε 12 δραστηριότητες και έλαβε χώρα σε 4 διδασκαλίες, από 3 δραστηριότητες στην κάθε μία. Οι δραστηριότητες δομήθηκαν με βάση τις τρεις μεταβλητές των δοκιμασιών: *το είδος της κανονικότητας, το είδος της δομής της και το είδος της δράσης των παιδιών*. Όλες οι δραστηριότητες ήταν με τη μορφή παιχνιδιού, οι περισσότερες είχαν σενάριο και περιλάμβαναν μια ποικιλία δράσεων και υλικών. Πιο συγκεκριμένα, εφαρμόστηκαν με τη σειρά που δόθηκαν στα παιδιά:

- Συνέχιση ηχητικής κανονικότητας με δομή ΑΒΓ, με ηχοποιήτες λέξεις (Δ1).
- Συμπλήρωση χρωματικής με αναπαραστατικά σχέδια (πιάτα) με δομή ΑΑΒΒ (Δ2).
- Συμπλήρωση σχηματικής από τραπουλόχαρτα με δομή ΑΑΒΓ (Δ3).
- Βρίσκουν στοιχείο που λείπει σε κινητική –ηχητική κανονικότητα με δομή ΑΑΒΓ με κινήσεις και ήχους του σώματος (Δ4).
- Βρίσκουν στοιχείο που λείπει σε κανονικότητα μεγεθών με δομή ΑΒΓΓ και ΑΒΒΓ με αναπαραστατικά σχέδια (κύβους) (Δ5).
- Βρίσκουν το λάθος στη δομή, σε κανονικότητα γεωμετρική, με δομή ΑΒΒΓΔ με οικοδομικό υλικό (Δ6).
- Βρίσκουν το λάθος στη δομή, σε ποσοτική, με δομή 1,2,3,4,5 από χάρτινα πλακάκια (Δ7).
- Εύρεση σωστής δομής από προτεινόμενες, σε κανονικότητα γεωμετρική –χρωματική με δομή ΑΒΓΔΔ από κάρτες με γεωμετρικά σχήματα (Δ8).
- Εύρεση σωστής δομής από προτεινόμενες, σε κανονικότητα σχηματική-χρωματική, με δομή ΑΑΒΓΔ, από κάρτες με σχέδια και χρώματα (Δ9).
- Αντιγραφή του κανόνα από κανονικότητα μεγεθών (κάρτα με κύκλους) με δομή ΑΑΒΒ σε κινητική (βήματα στο χώρο) (Δ10).
- Αντιγραφή του κανόνα από κανονικότητα γεωμετρική (λογικά μπλοκ) με δομή ΑΒΒΓΔ σε ηχητική (μουσικά όργανα) (Δ11).
- Τέλος, ζητήθηκε από το κάθε παιδί να φτιάξει τη δική του κανονικότητα (Δ12).

Το μοντέλο διδασκαλίας που εφαρμόστηκε, στόχευε στην αυτορρυθμιστική μάθηση, καθώς τα ίδια τα παιδιά οργάνωναν τη δράση τους σε κάθε δραστηριότητα, χωρίς να τους δίνονται κατευθυντήριες οδηγίες. Στο τέλος της κάθε δραστηριότητας ο έλεγχος γινόταν είτε από τις ομάδες ελέγχου, είτε

από το ίδιο το παιδί και από όλα τα παιδιά. Μετά τον έλεγχο όπου διατυπώναμε τη σωστή δράση, με ερωτήσεις που κάναμε στα παιδιά, προσπαθούσαμε να τα «γυρίσουμε πίσω», να δουν τον τρόπο που έδρασαν, να «αναστοχαστούν». Οι ερωτήσεις ήταν του τύπου:

- τι σκεφτήκατε για να κάνετε αυτό το σχέδιο;
- ποιο είναι το σχέδιο που επαναλαμβάνεται;
- τι θα πρέπει να θυμόμαστε για να ξανακάνουμε αυτό το σχέδιο;
- Πώς κάνατε αυτό το σχέδιο, ακολουθήσατε κάποια σειρά, ή βάλατε π.χ. τα πιάτα τυχαία;
- Από πού αρχίζει το σχέδιο και πού τελειώνει; (διατύπωση αρχής και τέλους).

Πιο συγκεκριμένα, την πρώτη μέρα στη φάση του αναστοχασμού, ενώ ένα μεγάλο ποσοστό έβρισκε τη σωστή κανονικότητα, στις ερωτήσεις φάνηκε πως δεν ήταν κατανοητό ότι υπήρχε ένας κανόνας που επαναλαμβάνονταν, καθώς τα παιδιά στην πλειοψηφία τους «διάβαζαν» όλο το σχέδιο, γεγονός που ανατράπηκε σταδιακά στις επόμενες μέρες, καθώς όλο και περισσότερα παιδιά κατανοούσαν τον κανόνα, αλλά και συστηματικά τους ζητούνταν η λεκτική διατύπωσή του. Καθ' όλη τη διάρκεια των δραστηριοτήτων, τα παιδιά έψαχναν για κανονικότητες, συζητούσαν μεταξύ τους για τη σειρά των στοιχείων, ποιο στοιχείο ήταν πρώτο και ποιο τελευταίο, ποιο ήταν το σχέδιο που επαναλαμβάνονταν και βοηθούσαν τους συμμαθητές τους όταν τους το ζητούσαν.

Στη διαδικασία ελέγχου των λαθών, όπου τα παιδιά έπρεπε μόνα τους να ελέγξουν την ορθότητα της δράση τους, έβρισκαν το λάθος τους και λεκτικά διατύπωναν την ορθή δράση. Άλλα παιδιά έκαναν τον αυτοέλεγχο και συζητούσαν μεταξύ τους για τη δράση τους. Μάλιστα, κάποια παιδιά που διαφοροποιούνταν στη δράση που άκουγαν από τους συμμαθητές τους ότι είναι η σωστή, εξέφραζαν τη διαφωνία τους και διατύπωναν τη σωστή κατά τη κρίση τους δράση, καταλήγοντας ότι οι ελεγκτές στο τέλος θα πουν το σωστό.

Την τρίτη και τέταρτη μέρα της διδακτικής παρέμβασης, έγινε μια πιο συστηματική προσπάθεια να ασκηθούν τα παιδιά στην ανάπτυξη σκέψης, πριν από τη δράση με την αντιμετωπιζόμενη κανονικότητα. Έτσι, προκαλέσαμε τα παιδιά νοητικά να πουν τι σκέφτονται, τι σχεδιάζουν να κάνουν ως δράση και στη συνέχεια να περάσουν στην εκτέλεση της δράσης και στον αναστοχασμό, βασισμένοι στις 3 φάσεις του Zimmerman: την προμελέτη (forethought), την εκτέλεση (performance) και τον αναστοχασμό (self-reflection) (Marcou A., Lerman S., 2006). Πιο συγκεκριμένα, τα περισσότερα παιδιά διατύπωναν το τι σκοπεύουν να κάνουν: ανέφεραν τη σειρά με την οποία έπρεπε να βάλουν τα στοιχεία στις κανονικότητες, διατύπωναν

την αρχή και το τέλος της κανονικότητας, έλεγαν ποιο είναι το λάθος στη δοσμένη κανονικότητα εξηγώντας ποιο στοιχείο είναι λάθος και γιατί, με ποιον τρόπο μπορούν στις κανονικότητες να αντιστοιχίσουν τα υλικά που αλλάζουν, με ποια σειρά σκοπεύουν να τα βάλουν και τι πρέπει να προσέξουν για να διατηρήσουν τον κανόνα σταθερό και ποιον κανόνα σκοπεύουν να εγκαταστήσουν ώστε να δημιουργήσουν μία δική τους κανονικότητα. Μάλιστα, την τρίτη μέρα της εφαρμογής, στη φάση του αναστοχασμού, ένα παιδί ανέφερε ότι το σχέδιο «κόβεται» και ξαναζωγραφίζεται από την αρχή» δείχνοντας το σημείο της επανάληψης. Αμέσως μετά, δύο με τρία παιδιά που δυσκολεύονταν να ξεχωρίσουν τον κανόνα, ανέφεραν ότι κατάλαβαν τι συμβαίνει με το σχέδιο και εξέφρασαν τον κανόνα. Από εκείνο το σημείο και έπειτα, αρκετά παιδιά διατύπωναν ότι το σχέδιο «κόβεται» και «ξαναζωγραφίζεται από την αρχή» και μάλιστα το αποτύπωναν στο σχέδιό τους με κάποιο σημάδι που έβαζαν στο σημείο της επανάληψης του κανόνα.

4. Ερευνητικά αποτελέσματα

4.1. Αποτελέσματα πριν τη διδακτική παρέμβαση

Οι επιδόσεις

Αναλύοντας τις απαντήσεις των παιδιών πριν τη διδακτική παρέμβαση, παρατηρούμε γενικά, ότι τα παιδιά αντιλαμβάνονται τη γενική ιδέα της κανονικότητας και μπορούν να τη χειριστούν.

Στον παρακάτω πίνακα παρουσιάζουμε τις σωστές και τις σχεδόν σωστές απαντήσεις των παιδιών στις 11 δοκιμασίες. Οι σχεδόν σωστές απαντήσεις, αφορούν σε αντιλήψεις όπου δεν έχει δομηθεί στέρεα η αναγνώριση του κανόνα της κανονικότητας και σχετίζονται με αντιστροφή του κανόνα, με επαναλήψεις του κανόνα όπου τα παιδιά μπερδεύονται και παραλείπουν ή αλλάζουν κάποιο στοιχείο, ή ενώ βρίσκουν το λάθος στην κανονικότητα, επιλέγουν λάθος μέγεθος- χρώμα.

Πίνακας 2:

Οι σωστές και σχεδόν απαντήσεις στις 11 δοκιμασίες πριν την παρέμβαση.

α/α	Δοκιμασίες	Σωστό %	Σχ. Σωστό %
1	Συνέχιση, γεωμετρικό AABB με λογικά μπλοκ	71,4	7,1
2	Εύρεση λάθους, χρωματικό ABΓ με τετράγωνα πλακάκια	54,8	9,5
3	Εύρεση δομής, χρωματικό ABΓ, με ξύλινες χάντρες	50,0	-
4	Συνέχιση, χρωματικό ABΓ με ξύλινες χάντρες	50,0	9,5
5	Δημιουργία κανονικότητας	47,6	11,9
6	Επέκταση αλγοριθμικής δομής 2,4,6,8,10 (κάρτες με βούλες)	45,2	-
7	Συμπλήρωση στοιχείου, γεωμετρικό AABΓ με ξύλινα σχήματα	35,7	-
8	Συνέχιση, ποσοτικό με δομή 1,2,3,4,5, με πλαστικούς κύβους	31,0	4,8
9	Αντιγραφή ενός γεωμετρικού ABΓ σε κανονικότητα μεγεθών με τουβλάκια και καλαμάκια	31,0	14,3
10	Συμπλήρωση στοιχείου, μεγέθη ABΓ με καλαμάκια	28,6	2,4
11	Εύρεση λάθους, μεγέθη ABBΓ με καλαμάκια	16,7	38,1

Παρατηρούμε ότι οι δοκιμασίες στις οποίες τα παιδιά απαντούν σωστά σε ποσοστό από 50- 71,4%, αφορούν σε συνέχιση, εύρεση λάθους και δομής κανονικότητας, με δομή απλή (AABB και ABΓ). Σε μικρότερο ποσοστό από 31-47,6% τα καταφέρνουν στη δημιουργία δική τους κανονικότητας, στην επέκταση αλγοριθμικής δομής, στη συμπλήρωση στοιχείου με πιο σύνθετη δομή (AABΓ), στη συνέχιση ποσοτικής κανονικότητας και στην αντιγραφή γεωμετρικής κανονικότητας σε κανονικότητα μεγεθών με απλή δομή (ABΓ). Τέλος, οι επιτυχίες μειώνονται σημαντικά, 16,7-28,6%, όταν πρόκειται να συμπληρώσουν στοιχείο και να βρουν το λάθος σε κανονικότητες μεγεθών με συνθετότερες δομές (ABΓΓ και ABBΓ αντίστοιχα).

Όσο αφορά στις σχεδόν σωστές απαντήσεις, η εύρεση λάθους σε κανονικότητα μεγεθών με σύνθετη δομή (ABBΓ) φαίνεται να δυσκολεύει περισσότερο τα παιδιά.

4.2. Αποτελέσματα μετά τη διδακτική παρέμβαση

Οι επιδόσεις

Στον παρακάτω πίνακα παρουσιάζουμε τις σωστές απαντήσεις των παιδιών, πριν και μετά τη διδακτική παρέμβαση. Παρατηρούμε ότι η επιτυχία των

παιδιών στην κατανόηση της ιδέας της κανονικότητας μετά τη διδακτική παρέμβαση, είναι πραγματικά εντυπωσιακή. Όπως φαίνεται από τον πίνακα, η συμπλήρωση γεωμετρικής κανονικότητας με σύνθετη δομή (AABΓ) και κανονικότητας μεγεθών με επίσης σύνθετη δομή (ABΓΓ), παρουσιάζει τη μεγαλύτερη επιτυχία μετά τη διδακτική παρέμβαση σε σχέση με την επιτυχία πριν τη διδακτική παρέμβαση.

Πίνακας 3:

οι επιτυχίες των παιδιών πριν και μετά την παρέμβαση

Δοκιμασίες	Επιτυχία Πριν	Επιτυχία Μετά
Συνέχιση, χρωματικό ABΓ με ξύλινες χάντρες	50%	95,2%
Συνέχιση, γεωμετρικό AABB με λογικά μπλοκ	71,4%	92,9%
Συνέχιση, ποσοτικό με δομή 1,2,3,4,5, με πλαστικούς κύβους	31%	83,3%
Συμπλήρωση στοιχείου, γεωμετρικό AABΓ με ξύλινα σχήματα	35,7%	95,2%
Συμπλήρωση στοιχείου, μεγέθη ABΓΓ με καλαμάκια	28,6%	95,2%
Εύρεση λάθους, χρωματικό ABΓ με τετράγωνα πλακάκια	54,8%	95,2%
Εύρεση λάθους, μεγέθη ABBΓ με καλαμάκια	16,7%	71,4%
Αντιγραφή ενός γεωμετρικού ABΓ σε κανονικότητα μεγεθών με τουβλάκια και καλαμάκια	31%	76,2%
Εύρεση δομής, χρωματικό ABΓ, με ξύλινες χάντρες	50%	90,5%
Επέκταση αλγοριθμικής δομής 2,4,6,8,10 (κάρτες με βούλες)	45,2%	78,6%
Δημιουργία κανονικότητας	47,6%	81%

Για να κατανοήσουμε την αποτελεσματικότητα της εφαρμογής της παρέμβασης, εξετάσαμε τη βελτίωση των επιδόσεων στις δοκιμασίες. Η μελέτη της βελτίωσης έγινε για να δούμε πόσο ποσοστό μετακινήθηκε στις σωστές και σχεδόν σωστές απαντήσεις. Για το σκοπό αυτό δημιουργήσαμε 11 καινούργιες μεταβλητές, οι οποίες υπολογίστηκαν ως η διαφορά της επίδοσης σε κάθε δοκιμασία πριν και μετά τη διδακτική παρέμβαση, εξαιρώντας τα παιδιά που απάντησαν σωστά στις δοκιμασίες, ώστε να έχουμε πραγματικά

το δείγμα εκείνο που παρουσιάζει κάποια αδυναμία μεγαλύτερη ή μικρότερη στην αναγνώριση του κανόνα.

Ο παρακάτω πίνακας δείχνει τη βελτίωση στις δοκιμασίες, ξεκινώντας από τη δοκιμασία με τη μεγαλύτερη βελτίωση στην επίδοση.

Πίνακας 4:

Η βελτίωση στις δοκιμασίες από τη μεγαλύτερη στη μικρότερη

Δοκιμασίες	% βελτίωση της επίδοσης
Γεωμετρικό AABB με λογικά μπλοκ (Δ2)	100,0
Συμπλήρωση στοιχείου, μεγέθη ABΓΤ με καλαμάκια (Δ5)	96,6
Συμπλήρωση στοιχείου, γεωμετρικό AABΓ με ξύλινα σχήματα (Δ4)	96,3
Εύρεση λάθους, χρωματικό ABΓ με τετράγωνα πλακάκια (Δ6)	94,7
Χρωματικό ABΓ με ξύλινες χάντρες (Δ 1)	90,4
Δημιουργία κανονικότητας (Δ11)	86,3
Εύρεση δομής, χρωματικό ABΓ, με ξύλινες χάντρες (Δ9)	81,0
Αντιγραφή ενός γεωμετρικού ABΓ σε κανονικότητα μεγεθών με τουβλάκια και καλαμάκια (Δ8)	79,3
Ποσοτικό με δομή 1,2,3,4,5, με πλαστικούς κύβους (Δ3)	75,9
Εύρεση λάθους, μεγέθη ABBΓ με καλαμάκια (Δ7)	75,9
Επέκταση αλγοριθμικής δομής 2,4,6,8,10 (κάρτες με βούλες) (Δ10)	60,9

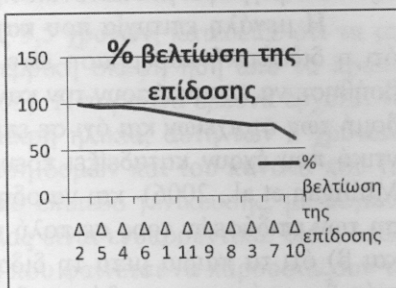
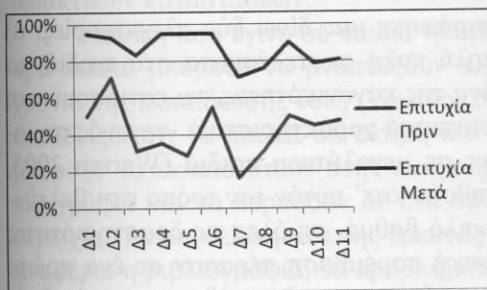
Παρατηρούμε ότι η βελτίωση στην επίδοση είναι μεγάλη, καθώς πρόκειται για ποσοστό μεγαλύτερο του 75% σε όλες τις δράσεις εκτός από μία, όπου η βελτίωση είναι της τάξης του 60,9%. Βλέπουμε ότι οι δοκιμασίες στις οποίες δυσκολεύονται περισσότερο τα παιδιά να κατανοήσουν τον κανόνα, είναι η

επέκταση αλγοριθμικού προτύπου, η συνέχιση αναπτυσσόμενης κανονικότητας, η αντιγραφή του κανόνα σε άλλο υλικό και η εύρεση λάθους σε κανονικότητα μεγεθών. Η δοκιμασία που φαίνεται να μη δυσκολεύει καθόλου τα παιδιά είναι η συνέχιση γεωμετρικής κανονικότητας.

Στο διάγραμμα 1, βλέπουμε την εντυπωσιακή αύξηση των σωστών απαντήσεων σε κάθε δοκιμασία μετά τη διδακτική παρέμβαση και στο διάγραμμα 2, τη βελτίωση στην επίδοση μετά την παρέμβαση σε κάθε δοκιμασία.

Διάγραμμα 1: οι επιτυχίες πριν και μετά την παρέμβαση

Διάγραμμα 2: η βελτίωση της επίδοσης



5. Συμπεράσματα- Συζήτηση

Όπως δείχνουν τα αποτελέσματα πριν τη διδακτική παρέμβαση, τα παιδιά αντιλαμβάνονται την ιδέα της κανονικότητας και μπορούν να τη χειριστούν από μικρή ηλικία (Ginsburg et al., 1999, Τζεκάκη & Κούλελη 2007). Όσο όμως η δράση γίνεται ανοίκεια για το παιδί, η δομή πιο σύνθετη (Τζεκάκη & Κούλελη, 2007) και το είδος της κανονικότητας πιο δύσκολο στον χειρισμό από το μικρό παιδί (αλγοριθμική, αναπτυσσόμενη, μεγεθών), οι επιτυχίες μειώνονται. Επίσης, τα παιδιά που πραγματοποιούν σωστά την κανονικότητα πριν τη διδακτική παρέμβαση, σε μεγάλο ποσοστό δυσκολεύονται να διατυπώσουν τον κανόνα της κανονικότητας. Μετά όμως τη διδακτική παρέμβαση, βρίσκουν το σχέδιο που επαναλαμβάνεται και το διατυπώνουν λεκτικά. Η δοκιμασία που δυσκολεύει τα παιδιά στη λεκτική διατύπωση και μετά το πέρας της παρέμβασης, είναι η αλγοριθμική κανονικότητα.

Η πιο δύσκολη δοκιμασία για τα παιδιά πριν την παρέμβαση, είναι να συμπληρώσουν στοιχείο που λείπει σε κανονικότητα μεγεθών με δομή AABΓ και η πιο εύκολη δράση να συνεχίσουν μία γεωμετρική κανονικότητα με δομή AABB. Ωστόσο, μετά τη διδακτική παρέμβαση, η επέκταση αλγο-

ριθμικού προτύπου είναι εκείνη η δράση στην οποία φαίνεται ότι τα παιδιά δυσκολότερα κατανοούν τον κανόνα, καθώς καταγράφηκαν τα μικρότερα ποσοστά στη βελτίωση της επίδοσης. Παρόλα αυτά, η βελτίωση που καταγράφηκε στην αντίληψη του κανόνα και σε αυτή τη δοκιμασία είναι υψηλή.

Ενώ πριν τη διδακτική παρέμβαση μόνο σε μία δράση, στη συνέχιση γεωμετρικής κανονικότητας με δομή AABB, απαντούν σωστά τα 2/3 των παιδιών, δηλαδή το 66,7%, μετά τη διδακτική παρέμβαση σε όλες τις δράσεις παρατηρείται αυτό το ποσοστό και μάλιστα σε πολύ μεγαλύτερο βαθμό. Αυτό ενισχύει την άποψη ερευνητών (Τζεκάκη & Κούλελη, 2007) ότι η συστηματική εξοικείωση από την μικρή ηλικία με την αναγνώριση και περιγραφή του κανόνα κανονικότητας, οδηγεί στην κατανόηση της βασικής ιδέας που περιγράφει μία κανονικότητα.

Η μεγάλη επιτυχία που καταγράφηκε μας δίνει δύο πληροφορίες: α) ότι η διδακτική παρέμβαση είχε πολύ καλά αποτελέσματα στα παιδιά, τα βοήθησε να κατανοήσουν τον κανόνα της κανονικότητας, να εστιάσουν στη δομή των στοιχείων και όχι σε επιφανειακά χαρακτηριστικά -γεγονός σημαντικό που έχουν καταδείξει έρευνες σε μεγαλύτερα παιδιά (Warren 2005, Mulligan et al., 2006)- και να οδηγηθούν κατ' αυτόν τον τρόπο στη βελτίωση των επιδόσεών τους σε πολύ υψηλό βαθμό, σε όλες τις δραστηριότητες και β) ότι τα παιδιά μετά τη διδακτική παρέμβαση πέρασαν σε ένα πρώτο επίπεδο γενίκευσης, καθώς οι δοκιμασίες αφορούν σε διαφορετικές δράσεις, δομές και είδη κανονικότητας. Μάλιστα, η έρευνα τονίζει τη σημαντικότητα της γενίκευσης των κανονικότητων στην κατανόηση της άλγεβρας (Warren, 2004).

Από τα αποτελέσματα φαίνεται η μεγάλη σημασία του μοντέλου διδασκαλίας και των ειδικών διδακτικών καταστάσεων που εφαρμόστηκαν στη διδακτική παρέμβαση (Τζεκάκη, 2000). Συγκεκριμένα, οι δραστηριότητες που ήταν σε μορφή παιχνιδιού και οι περισσότερες από αυτές ήταν επενδυμένες με ένα σενάριο, το ποικίλο και ελκυστικό παιδαγωγικό υλικό που χρησιμοποιήθηκε και οργάνωσε τη δράση του παιδιού γύρω από την έννοια της κανονικότητας, το κίνητρο που δόθηκε στα παιδιά, καθώς έπρεπε μόνα τους να λύσουν το πρόβλημα και να ελέγξουν την ορθότητα της δράσής τους, οι εκ των προτέρων διατυπώσεις των επερχόμενων δράσεων στις μισές δραστηριότητες, φαίνεται να οδήγησαν σε αυτό το εκπληκτικό αποτέλεσμα.

Καθώς εφαρμόζονταν οι δραστηριότητες της διδακτικής παρέμβασης, τα παιδιά κατά τη διάρκεια του αναστοχασμού, κατάφεραν σταδιακά να «διαβάσουν» και να διατυπώσουν λεκτικά το μοτίβο που επαναλαμβάνεται. Έτσι, άρχισαν να κατανοούν, ότι για κάθε όρο της κανονικότητας υπάρχει ένας όρος πριν και ένας μετά, υπάρχει αρχή και τέλος και ένας κανόνας που

επαναλαμβάνεται, δηλαδή άρχισαν σταδιακά να ανακαλύπτουν τη λογική που κρύβεται πίσω από την κανονικότητα που τους δίνεται και να σημειώσουν μεγάλη επιτυχία στις δοκιμασίες μετά την παρέμβαση. Επίσης, τα παιδιά λειτούργησαν καταλυτικά το ένα για το άλλο ως προς την κατανόηση του κανόνα, όπως φαίνεται από τη διατύπωση των παιδιών πως το σχέδιο «κόβεται» και «ξαναζωγραφίζεται από την αρχή», που περιγράψαμε στη διδακτική παρέμβαση, αλλά και από τις συζητήσεις που έκαναν μεταξύ τους σχετικά με την ορθότητα της δράσης τους. Μάλιστα, δεν πρέπει να μας διαφεύγει το γεγονός ότι η έρευνα πραγματοποιήθηκε σε παιδιά που προέρχονται από μη προνομιούχα περιβάλλοντα, γεγονός που ισχυροποιεί ακόμη περισσότερο το είδος του μοντέλου, την ποιότητα και τη φύση των ειδικών διδακτικών καταστάσεων.

Μελέτη που έγινε σε παιδιά ηλικίας 9,5 χρόνων, κατέδειξε ότι τα μικρά παιδιά μπορούν να αναπτύξουν αλγεβρική σκέψη ήδη από τα πρώτα χρόνια της εκπαίδευσής τους (Warren, 2005). Η παρούσα έρευνα έρχεται να καταδείξει ότι τα παιδιά σε ακόμη πιο μικρή ηλικία, αυτή των 5 χρόνων, μπορούν να εκπαιδευτούν στην αναγνώριση δομών και του κανόνα που τις περιγράφει και να περάσουν σε ένα πρώτο επίπεδο γενίκευσης, με μεγάλη επιτυχία. Τα αποτελέσματα της έρευνάς μας είναι ενθαρρυντικά, διότι όπως αναφέρει η βιβλιογραφία, τα προβλήματα που φαίνεται να παρουσιάζουν τα παιδιά στην αναγνώριση προτύπων και δομών σε μαθηματικές καταστάσεις (Warren 2005, Mulligan et al., 2006), δημιουργεί στα παιδιά δυσκολίες στην κατανόηση της άλγεβρας (Vergnaud V., 1998, Καλδρυμίδου et al., 2002, Warren, 2005) και προτείνεται να εκπαιδεύσουμε τα παιδιά από νωρίς με μαθηματικές δράσεις που να αφορούν στην αναγνώριση προτύπων και δομών και μάλιστα στη γενίκευσή τους, ώστε να τα βοηθήσουμε να κατανοήσουν την άλγεβρα (Warren, 2004).

Σε ένα δεύτερο επίπεδο ανάγνωσης των αποτελεσμάτων, θα λέγαμε ότι το διδακτικό μοντέλο της αυτορρυθμιστικής μάθησης και οι ειδικές διδακτικές καταστάσεις, αποτελούν κλειδί στη διαδικασία της μάθησης. Ίσως μια περαιτέρω έρευνα στη ανάπτυξη αυτορρυθμιστικής γλώσσας από αυτή τη μικρή ηλικία εκπαίδευσης, δώσει ενδιαφέροντα στοιχεία στις πρακτικές της διδασκαλίας και της μάθησης.

Βιβλιογραφικές αναφορές

- Καλδρυμίδου, Μ., Οικονόμου, Α., Οικονόμου, Π., Σακονίδης, Χ., & Τζεκάκη, Μ. (2002). Η αξιολόγηση των μαθηματικών γνώσεων μαθητών Στ' Δημοτικού και Γ' Γυμνασίου, *Πρακτικά 2^{ης} Διημερίδας διδακτικής μαθηματικών*, 15-39. Science Press: Θεσσαλονίκη.

- Τζεκάκη, Μ. (2000). *Μαθηματικές δραστηριότητες για την προσχολική ηλικία*. Gutenberg: Αθήνα.
- Τζεκάκη, Μ. (2007). *Μικρά παιδιά μεγάλα μαθηματικά νοήματα*. Gutenberg: Αθήνα.
- Τζεκάκη, Μ., & Κούλελη, Μ. (2007). Διερεύνηση της ικανότητας αναγνώρισης προτύπων σε παιδιά προσχολικής ηλικίας, *Πρακτικά του 2^{ου} Πανελλήνιου Συνεδρίου της Ένωσης Ερευνητών στη Διδακτική των Μαθηματικών*, 267-278. Τυπωθήτω: Αθήνα.
- Vergnaud, V. (1998). Από την αριθμητική στην άλγεβρα. Μερικές δυσκολίες στην αρχή του Γυμνασίου, *Πρακτικά 1^{ης} Διημερίδας διδακτικής μαθηματικών*, 68-79. Science Press: Θεσσαλονίκη.
- Fox, J. (2005). Child- initiated mathematical patterning in the pre-compulsory years. In H. L. Chick & J. L. Vincent (Eds.), *Proceedings of the 29th International Group of Psychology of Mathematics Education*, 2, 313-320. Melbourne: PME.
- Ginsburg, H.P., Inoue, N. & Seo, K. H. (1999). Young Children doing mathematics: Observations of everyday activities. In J. Copely (Ed.), *Mathematics in the early years*, 88-99. Reston, V.A. National Council of Teachers of Mathematics.
- Marcou, A., & Lerman, S. (2006). Towards the development of a self- regulated mathematical problem solving model. In Novotná, J., Moraová, H., Krátká, M. & Stehlíková, N. (Eds.), *Proceedings 30th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, 4, 137-144. Prague: PME.
- Mulligan, J., Mitchelmore, M., & Prescott, A. (2006). Integrating concepts and processes in early mathematics: the Australian pattern and structure mathematics awareness project (PASMAT). In Novotná, J., Moraová, H., Krátká, M. & Stehlíková, N. (Eds.), *Proceedings 30th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, 4, 209-216. Prague: PME.
- Mulligan, J., Prescott, A., & Mitchelmore, M. (2003). Reflections on early mathematics learning. A framework for developing pattern and structure in early numeracy, *Reflections* 28 (1), 7-11.
- Mulligan, J., Prescott, A., Papic, M., & Mitchelmore, M. (2006). Improving early numeracy through a pattern and structure. Mathematics awareness program (PASMAT). In Chick, H. & Vincent, J. (Eds.), *Proceedings 29th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, 4, 376-383.
- Radford, L. (2010). Layers of generality and types of generalization in pattern activities. *PNA*, 4(2), 37-62.
- Rivera, F. D (2010). Visual templates in pattern generalization activity, *Educational Studies in Mathematics*, 73:297-328.
- Stalo, M., Elia, I., Gagatsis, A., Theoklitou, & A., Savva, A. (2006). Levels of understanding of patterns in multiple representations. In Novotna, J., Moraova, H., Kratka, M. & Stehlikova, N. (Eds.), *Proceedings 30th Conference of the*

- International Group for the Psychology of Mathematics Education*, 4, 161-168. Prague: PME.
- Warren, E. & Cooper, T. (2007). Repeating patterns and multiplicative thinking: analysis of classroom interactions with 9-year old students that support the transition from the known to the novel. *Journal of Classroom interaction*, 41.2, 42.1, 7-17.
- Warren, E. (2000). Visualisation and the development of early understanding in algebra. In T. Nakahara & M. Koyama (Eds.), *Proceedings of the 24th conference of International Group of Psychology of Mathematics Education* 4, 417-424. Hiroshima: University of Hiroshima.
- Warren, E. (2004). Generalizing arithmetic: supporting the process in the early years. In M. Johnsen Hoines & A. B. Fuglestad (Eds.), *Proceedings of the 28th International Group of Psychology of Mathematics Education*, 4, 417-424. Bergen- Norway: Bergen University College.
- Warren, E. (2005). Young children's ability to generalize the pattern rule for growing patterns. In H. L. Chick & J. L. Vincent (Eds.), *Proceedings of the 29th International Group of Psychology of Mathematics Education* 4, 305-312. Melbourne: PME.

Abstract

The present study examines the improvement ability of regularities recognition in five year-old children, through instruction giving in mathematic situations. The children's knowledge as far as the recognition of rule that describes a regularity is concerned, has been checked for each child individually, before and 15 days after the end of the instructive intervention, using 11 assessments. The results revealed that the children's ability to recognise the rule and to generalise to a first level has been considerably improved through the systematic familiarisation with the recognition and comprehension of the rule that organises the elements of a regularity.

Ευαγγελία Παπαδοπούλου

Νηπιαγωγός

Κάτοχος Μεταπτυχιακού Διπλώματος

e- mail: evanpapado@sch.gr