Η επίδραση της «άδειας αριθμογραμμής» στον νοερό υπολογισμό προσθέσεων και αφαιρέσεων διψήφιων αριθμών σε μαθητές που παρουσιάζουν μαθησιακές αδυναμίες στην αριθμητική

Ιωάννης Καραντζής, Γεώργιος Αγγελόπουλος, Ιωάννα Μπακοπούλου

Είναι παραδεκτό ότι, λόγω των απαιτήσεων της σύγχρονης εκπαίδευσης, δίνεται μια νέα κατεύθυνση, η οποία έχει ως στόχο να εντάξει το μαθητή στο επίκεντρο του μαθήματος μέσα από καθημερινές οικείες καταστάσεις, έτσι ώστε αυτός να είναι σε θέση να αναδείξει σαφέστερα τον τρόπο σκέψης του, αλλά και να συνδέσει την παρεχόμενη σχολική γνώση με την καθημερινή ζωή. Μέσα σε αυτό το πλαίσιο, δίνεται ιδιαίτερη έμφαση από το αναλυτικό πρόγραμμα σπουδών στην εκτέλεση νοερών αριθμητικών υπολογισμών από τους μαθητές, καθώς και στην ανάδειξη των στρατηγικών που ακολουθούν για την επίλυσή τους. Είναι γεγονός ότι ο νοερός μαθηματικός υπολογισμός είναι ο πιο συχνά χρησιμοποιούμενος τρόπος υπολογισμού στην καθημερινότητά μας (Thompson, 1995), μιας και «οι ενήλικες στην καθημερινή τους ζωή χρησιμοποιούν τον νοερό υπολογισμό περισσότερο από ¾ σε σχέση με όλους τους άλλους υπολογισμούς» (McIntosh, 2006, σ. 1). Στο σημείο αυτό κρίνουμε απαραίτητο να αποσαφηνισθεί ότι ως νοερός υπολογισμός μπορεί να οριστεί η διαδικασία εκείνη κατά την οποία το άτομο εκτιμά με ακρίβεια το αριθμητικό αποτέλεσμα χωρίς τη βοήθεια εξωτερικού μέσου (Maclellan, 2001, σ.145).

Η ένταξη του νοερού υπολογισμού στη διδασκαλία των Μαθηματικών αποτελεί το ζητούμενο της σύγχρονης σχολικής τάξης, καθώς όπως αναφέρουν οι White & Singh (2005), είναι ένας τρόπος για να μάθει ο μαθητής πώς «δουλεύουν» οι αριθμοί, χρησιμοποιώντας μια προσέγγιση δημιουργική για την επίλυση ενός προβλήματος. Δηλαδή, ενθαρρύνει τα παιδιά να χειρίζονται με ευελιξία τους αριθμούς και αποτελεί τη βάση για την ανάπτυξη των δεξιοτήτων υπολογισμού (Varol & Farran, 2007). Συνεπώς, οι νοεροί υπολογισμοί δίνουν στους μαθητές τη δυνατότητα για μεταφορά της γνώσης σε νέα περιβάλλοντα και ιδίως για σύνδεση των μαθηματικών γνώσεων με την καθημερινή ζωή. Εκτός από την άμεση εφαρμογή των νοερών υπολογισμών στην ζωή μας, οι Heirdsfield & Cooper (2004) τονίζουν ότι οι νοεροί υπολογισμοί βοηθούν τα παιδιά να κατανοήσουν πώς χρησιμοποιούμε τους αριθμούς και ποια είναι η δομή τους, καθώς και να επινοήσουν στρατηγικές

για την επίλυση προβλημάτων αναπτύσσοντας ικανότητες για υποθέσεις και γενικεύσεις. Συγκεκριμένα, η έρευνα (Heirdsfield, 2000) έδειξε ότι ο νοερός υπολογισμός βοηθά το άτομο: α) να αισθητοποιήσει καλύτερα την έννοια του αριθμού (Maclellan, 2001), β) να αποκτήσει μεγαλύτερη αυτοπεποίθηση και γ) να αναπτύξει μεταγνωστικές δεξιότητες.

Ύστερα από βιβλιογραφική περιδιάβαση, διαπιστώνεται ότι πολλές έρευνες έχουν διεξαχθεί, κυρίως στο εξωτερικό, προκειμένου να αναδείξουν τις στρατηγικές που ακολουθούν οι μαθητές για να εκτελέσουν τους νοερούς υπολογισμούς, τα μέσα διδασκαλίας που χρησιμοποιούνται και τα λάθη που κάνουν κατά τη διάρκεια αυτής της διαδικασίας. Αναφερόμενοι στις στρατηγικές κατά την πρόσθεση και αφαίρεση διψήφιων αριθμών οι πιο εύχρηστες στρατηγικές για τους μαθητές του δημοτικού είναι οι εξής (Maclellan, 2001˙ Macintyre & Forrester, 2003˙ Varol & Farran, 2007˙ Lemonidis, 2008˙ Λεμονίδης & Λυγούρας, 2008):

α) Οι στρατηγικές υψηλού επιπέδου, καθώς συντελούν στην καλή γνώση και κατανόηση των αριθμών (Heirdsfield & Cooper, 2004˙ Askew & Brown, 2006˙ Varol and Farran, 2007), από τις οποίες οι πιο συχνά χρησιμοποιούμενες είναι: η στρατηγική του διαχωρισμού των δεκάδων και μονάδων (1010) και η στρατηγική (N10) (Καραντζής & Τόλλου, 2009). Σύμφωνα με τη στρατηγική 1010, υπολογίζονται ξεχωριστά οι δεκάδες και ξεχωριστά οι μονάδες (π.χ. 34+25: 30+20=50, 4+5=9, 50+9=59 και 48-26: 40-20=20, 8-6=2, 20+2=22 ή 48-26: 40-20=20, 20-6=14, 14+8=22), ενώ στην αφαίρεση με κρατούμενο, μετά την αφαίρεση των δεκάδων προστίθενται στη διαφορά τους οι μονάδες του μειωτέου και από το άθροισμα αυτό αφαιρούνται οι μονάδες του αφαιρετέου (π.χ. 74-69: 70-60=10, 10+4=14, 14-9=5). Σύμφωνα με τη στρατηγική N10, για την πρόσθεση, στον πρώτο προσθετέο προστίθενται πρώτα οι μονάδες του δεύτερου προσθετέου και μετά οι δεκάδες του (π.χ. 34+25: 34+5=39, 39+20=59) ή πρώτα οι δεκάδες και μετά οι μονάδες του. Αναφορικά με την αφαίρεση αφαιρούνται από το μειωτέο πρώτα οι μονάδες του αφαιρετέου και μετά οι δεκάδες του (π.χ. 48-26: 48-6=42, 42-20=22) ή πρώτα οι δεκάδες και μετά οι μονάδες. Τέλος, πρέπει να αναφέρουμε ότι στην κατηγορία των στρατηγικών υψηλού επιπέδου εντάσσονται και οι ολιστικές στρατηγικές όπως είναι η στρογγυλοποίηση (π.χ. 34+25: 35+25=60, 60-1=59 και 48-26: 50-26=24, 24-2=22 ή (π.χ. 34+25: 40+19=59 και 48-26: 50-28=22).

β) Οι στρατηγικές χαμηλού επιπέδου από τις οποίες η συνηθέστερη είναι αυτή του παραδοσιακού αλγόριθμου, που εκτελείται νοερά ακολουθώντας τον αλγόριθμο της κάθετης πρόσθεσης ή αφαίρεσης (π.χ. 34+25: 5+4=9, 3+2=5, 59 και 36-25: 5 από 6 = 1, 2 από 3 = 1, αποτέλεσμα: 11). Επίσης, στην κατηγορία αυτή των στρατηγικών εντάσσεται και η στρατηγική της

επαρίθμησης, όπου, για την πρόσθεση, στις μονάδες του πρώτου προσθετέου προστίθενται μία- μία οι μονάδες του δεύτερου προσθετέου και για την αφαίρεση, αφαιρούνται οι μονάδες του αφαιρετέου από αυτές του μειωτέου μία προς μία (π.χ. 34+25: 34+1+1…=59, 48-26: 48-1-1…=22 κτλ.). Επίσης, στην κατηγορία αυτή εντάσσεται και η στρατηγική της απαρίθμησης μια στρατηγική που οι μαθητές μπορούν να χρησιμοποιήσουν και αντικείμενα, προκειμένου να διεκπεραιώσουν τη διαδικασία του υπολογισμού.

Όσον αφορά τα μέσα διδασκαλίας υπολογισμών η «άδεια αριθμογραμμή» (empty number line) αποτελεί ενδεχομένως το πιο σημαντικό μέσο διδασκαλίας καθώς, σύμφωνα με την Κολέζα (2009, σελ. 257) «έχει αποδειχθεί ότι είναι ένα ισχυρό εργαλείο για την υποστήριξη των νοερών στρατηγικών πρόσθεσης και αφαίρεσης, η αποτελεσματικότητα της όμως συχνά περιορίζεται από μια έλλειψη γνώσης των δασκάλων σχετικά με τον τρόπο εξοικείωσης των μαθητών με το συγκεκριμένο εργαλείο και τη χρήση στη διδασκαλία». Μάλιστα, η ένταξη της στρατηγικής Ν10 συνδυαστικά με τη χρήση της «άδειας αριθμογραμμής» στην διδασκαλία θεωρείται ωφέλιμη, καθώς, όπως αναφέρεται από τους Klein, Beishuizen & Treffers (1998), η «άδεια αριθμογραμμή» όχι μόνο επιτρέπει στους μαθητές να εκφράσουν τις στρατηγικές που ακολούθησαν για να επιλύσουν μία πράξη, αλλά τους διευκολύνει να καταλάβουν, μαρκάροντας τα βήματά τους κάθε φορά, ποια διαδικασία έχουν ακολουθήσει ως τότε και ποια διαδικασία τους έχει απομείνει για να ολοκληρώσουν την πράξη του προβλήματος.

Στηριζόμενοι λοιπόν στα ευρήματα προηγούμενης έρευνάς μας (Καραντζής και συνεργάτες, 2011), σύμφωνα με την οποία η εφαρμογή εκ μέρους των μαθητών της στρατηγικής Ν10 μέσω της χρήσης της «άδειας αριθμογραμμής» βελτίωσε τις επιδόσεις τους και μείωσε τα λάθη τους στο νοερό υπολογισμό προσθέσεων και αφαιρέσεων διψήφιων αριθμών, εστιάσαμε το ενδιαφέρον μας στο να ερευνήσουμε κατά πόσο μια διδακτική παρέμβαση στη Γ΄ τάξη του δημοτικού σχολείου στο νοερό υπολογισμό προσθέσεων και αφαιρέσεων διψήφιων αριθμών προωθώντας τη στρατηγική Ν10 μέσα από τη χρήση της «άδειας αριθμογραμμής» βελτιώνει τις επιδόσεις των «αδύναμων» μαθητών στην αριθμητική και σε ποιο βαθμό. Θα ήταν ωφέλιμο για το μαθητή με χαμηλές επιδόσεις στην αριθμητική, ο κάθε εκπαιδευτικός να είναι γνώστης εύχρηστων εργαλείων νοερού υπολογισμού. Συνεπώς, θα ήταν σκόπιμο να ερευνηθεί κατά πόσο η χρήση της στρατηγικής Ν10 συνδυαστικά με την «άδεια αριθμογραμμή» τον βοηθά στην καλύτερη κατανόηση της σκέψης του, δεδομένου ότι σε προηγούμενες έρευνες (White & Singh, 2005˙ McIntosh, 2005˙ Καραντζής και συνεργάτες, 2010˙ Καραντζής και συνεργάτες, 2011) η χρήση της «άδειας αριθμογραμμής» φάνηκε ότι είναι ένα εργαλείο που μπορεί να συμβάλει προς αυτή την κατεύθυνση, καθώς

προσφέρει ευελιξία στους μαθητές και καλύτερη κατανόηση του τρόπου σκέψης τους. Στο σημείο αυτό πρέπει να διασαφηνίσουμε ότι δε θεωρούμε τη στρατηγική Ν10 ως την καλύτερη στρατηγική (άλλωστε οι μαθητές αφήνονται ελεύθεροι να ανακαλύψουν και να χρησιμοποιήσουν τις στρατηγικές που τους ταιριάζουν αποκτώντας ευελιξία στη σκέψη τους), αλλά επειδή ο στόχος μας ήταν να ερευνήσουμε την επίδραση της «άδειας αριθμογραμμής» στον νοερό υπολογισμό, θεωρήσαμε ότι αυτή η στρατηγική προσιδιάζει καλύτερα στην προκειμένη περίπτωση. Με γνώμονα τα ευρήματα της προηγούμενης έρευνάς μας σχεδιάσαμε και πραγματοποιήσαμε την παρούσα έρευνα.

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ

Συμμετέχοντες/ουσες

Η έρευνα διεξήχθη την περίοδο Νοεμβρίου – Δεκεμβρίου 2010 και σ' αυτή συμμετείχαν όλοι οι μαθητές που φοιτούσαν στη Γ΄ τάξη δύο (2) 12/θέσιων δημοτικών σχολείων της πόλης των Πατρών (για να υπάρχουν δύο τμήματα στην τάξη έτσι ώστε το ένα να αποτελέσει την ομάδα ελέγχου και το άλλο την πειραματική), τα οποία επιλέχθηκαν με τη μέθοδο της απλής τυχαίας δειγματοληψίας (Cohen and Manion, 1994). Συγκεκριμένα, στην έρευνα έλαβαν μέρος 70 μαθητές που φοιτούσαν στην Γ΄ τάξη (41 αγόρια και 29 κορίτσια). Μετά από κλήρωση το ένα τμήμα της Γ΄ τάξης του κάθε σχολείου επιλέχθηκε ως πειραματική ομάδα και το άλλο τμήμα ως ομάδα ελέγχου. Δεδομένου ότι μας ενδιέφερε η επίδοση των «αδύναμων» μαθητών στην αριθμητική , ζητήσαμε τη γνώμη των δασκάλων. Οι δάσκαλοι μας υπέδειξαν μια ομάδα παιδιών της τάξης τους με χαμηλή επίδοση στην αριθμητική από τους οποίους επιλέξαμε από την ομάδα ελέγχου 26 μαθητές και από την πειραματική 17, αφού πρώτα εξετάσαμε όλους τους μαθητές σε ένα αρχικό τεστ. Η επιλογή αυτών των μαθητών έγινε έτσι ώστε αυτοί αφενός να ανήκουν στην ομάδα των μαθητών που υπέδειξαν οι δάσκαλοι ότι έχουν χαμηλή επίδοση στην αριθμητική και αφετέρου να έχουν και χαμηλή επίδοση στο αρχικό τεστ. Έτσι οι μαθητές της χαμηλής επίδοσης στην αριθμητική που υπέδειξαν οι δάσκαλοι σημείωσαν ποσοστό επιτυχίας στο αρχικό τεστ το ανώτερο 62,5%, ένα αποτέλεσμα επίδοσης σχετικά χαμηλό σε σχέση με τους υπόλοιπους μαθητές που η επίδοσή τους άγγιξε και το ποσοστό επιτυχίας 100%.

Υλικά

Το κριτήριο εξέτασης για το αρχικό και τελικό τεστ περιελάμβανε οχτώ (8) πράξεις εκ των οποίων οι τέσσερις (4) ήταν προσθέσεις και οι υπόλοιπες τέσσερις (4) ήταν αφαιρέσεις με διψήφιους αριθμούς. Τόσο στις προσθέσεις όσο και στις αφαιρέσεις που δόθηκαν οι μισές ήταν χωρίς κρατούμενο και οι άλλες μισές με κρατούμενο. Επειδή το τεστ δεν ήταν σταθμισμένο, φροντίσαμε κατά το δυνατόν να έχει όσο περισσότερα στοιχεία μπορούσαμε που να το καθιστούν αξιόπιστο και έγκυρο. Έτσι, πέρα από το γεγονός ότι το υλικό μας ήταν εξισωμένο ως προς τους παράγοντες «πράξη» και «κρατούμενο» φροντίσαμε σε αυτό να χρησιμοποιούνται σχεδόν όλοι οι αριθμοί τόσο στο σκέλος των μονάδων όσο και των δεκάδων ως δεδομένα και ως εξαγόμενα των πράξεων. Επίσης, μέρος αυτού του υλικού δοκιμάστηκε και σε άλλες έρευνές μας με μεγάλη επιτυχία. Αναφορικά με το ποσότητα των πράξεων που περιελάμβανε το τεστ, φροντίσαμε να μην απασχολήσουμε τους μαθητές περισσότερο από 20 λεπτά, προκειμένου να μην κουραστούν αλλά και να μην απουσιάσουν πολύ χρόνο από την τάξη τους. Μια πιλοτική έρευνα μας υπέδειξε ότι οι οκτώ (8) πράξεις ήταν ένας αρκετά ικανοποιητικός αριθμός, έτσι ώστε να εκπληρώνονται οι ανωτέρω προϋποθέσεις (κόπωση μαθητών και μικρός χρόνος απασχόλησής τους). Οι πράξεις με τη σειρά που δόθηκαν, καταγεγραμμένες σε καρτέλες με οριζόντια μορφή και την ίδια γραμματοσειρά, ήταν οι εξής: 65+22, 19+63, 58+34, 23+72, 47-13, 62-38, 69-35 και 37-19. Ο Van de Walle (2005) τονίζει ότι οι οριζόντιες διατάξεις βοηθούν τους μαθητές να μην χρησιμοποιούν τους παραδοσιακούς αλγόριθμους, αφού με αυτόν τον τρόπο σκέφτονται με αριθμούς και όχι με ψηφία.

Διαδικασία

Η έρευνα πραγματοποιήθηκε στα μέσα της σχολικής χρονιάς σε τρεις φάσεις. Στην πρώτη και τρίτη φάση (αρχικό και τελικό τεστ) η εξέταση του δείγματος έγινε με τη μορφή της ατομικής συνέντευξης και διαρκούσε περίπου 20 λεπτά της ώρας. Ο χώρος της εξέτασης ήταν ένας ιδιαίτερος χώρος του σχολείου, όπου επικρατούσε ησυχία και οι μαθητές απερίσπαστοι από ήχους μπορούσαν να επικεντρωθούν στη νοερή επίλυση των υπολογισμών που τους είχαν δοθεί. Ειδικότερα, οι πράξεις δίνονταν μία-μία σε καρτέλες και μετά την εκτέλεση καθεμιάς ακολουθούσε συζήτηση μεταξύ των ερευνητών και των μαθητών, με στόχο να περιγράψουν τη διαδικασία επίλυσης και να αποσαφηνιστεί η στρατηγική που ακολούθησαν. Ύστερα, οι ερευνητές κατέγραφαν στο πρωτόκολλο του μαθητή το αποτέλεσμα που βρήκε και τον τρόπο που σκέφτηκε. Μεταξύ των άλλων, στους μαθητές δόθηκαν στην

αρχή δύο (2) δοκιμαστικές-αναγνωριστικές πράξεις, μία πρόσθεση και μία αφαίρεση, προκειμένου να γίνει κατανοητή η διαδικασία και ο τρόπος με τον οποίο έπρεπε να σκεφτούν και να εκτελέσουν τις πράξεις. Τέλος, η επίδοση του κάθε μαθητή στο νοερό υπολογισμό και δύο πράξεων υπολογιζόταν για την κάθε στρατηγική ως εξής: (πλήθος των σωστών απαντήσεων / 8) x 100).

Η δεύτερη φάση, περιελάμβανε τη διδακτική μας παρέμβαση μόνο στην πειραματική ομάδα, ενώ η ομάδα ελέγχου παρακολουθούσε κανονικά το ωρολόγιο πρόγραμμα της τάξης της. Η παρέμβαση μας έγινε μέσα σε 5 διδακτικές ώρες των Μαθηματικών του εβδομαδιαίου προγράμματος με στόχο να ασκηθούν οι μαθητές, με μειωμένη επίδοση στην αριθμητική, στο νοερό υπολογισμό με τη χρήση της «άδειας αριθμογραμμής» και με την εφαρμογή της στρατηγικής Ν10, προκειμένου να βελτιώσουν τις επιδόσεις τους.

Αρχικά δόθηκε στους μαθητές, οι οποίοι εργάζονταν σε ομάδες των 4ρων ατόμων, μια πρόσθεση ή αφαίρεση για να υπολογίσουν με νοερό τρόπο το αποτέλεσμα. Στη συνέχεια κάθε ομάδα ανακοίνωσε το αποτέλεσμα και τη στρατηγική που χρησιμοποίησε και στο τέλος ο δάσκαλος υπέδειξε και έναν άλλο τρόπο υπολογισμού χρησιμοποιώντας ως βοηθητικό μέσο την «άδεια αριθμογραμμή» σε συνδυασμό με την στρατηγική Ν10. Η διαδικασία αυτή επαναλαμβανόταν σε μια σειρά προσθέσεων και αφαιρέσεων όπου ο δάσκαλος προέτρεπε τους μαθητές να χρησιμοποιούν την «άδεια αριθμογραμμή» ως βοηθητικό μέσον και παράλληλα να εφαρμόζουν τις αρχές της Ν10 στρατηγικής. Μετά από την ανακοίνωση του αποτελέσματος κάθε πράξης και τη στρατηγική που χρησιμοποιούσε η κάθε ομάδα, ακολουθούσε συζήτηση και ανταλλαγή απόψεων. Σε αυτό το σημείο θα πρέπει να επισημάνουμε ότι η παρούσα έρευνα ασχολήθηκε με την ανάλυση των επιδόσεων των «αδύναμων» μαθητών στην αριθμητική μόνο στις σωστές απαντήσεις που έδωσαν και τις στρατηγικές που χρησιμοποίησαν για να εκτελέσουν τους νοερούς αριθμητικούς υπολογισμούς και όχι με τα λάθη που πραγματοποίησαν οι μαθητές και τις αιτίες που τους οδήγησαν σε αυτά, τα οποία ίσως να είναι αντικείμενο μιας άλλης ερευνητικής προσπάθειας.

ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ – ΣΧΟΛΙΑΣΜΟΣ

Η στατιστική ανάλυση των δεδομένων έγινε με τη βοήθεια του στατιστικού προγράμματος SPSS v. 15. Υπολογίστηκαν οι μέσοι όροι και οι τυπικές αποκλίσεις των επιδόσεων των μαθητών στον νοερό υπολογισμό προσθέσεων και αφαιρέσεων διψήφιων αριθμών τόσο της ομάδας ελέγχου όσο και της πειραματικής ομάδας στο αρχικό και τελικό τεστ (Πίνακας 1). Επίσης, πραγματοποιήθηκε στατιστικός έλεγχος (με το t κριτήριο) για την ύπαρξη ή

μη στατιστικώς σημαντικής διαφοράς τόσο μεταξύ των ομάδων ελέγχου και πειραματικής στο αρχικό και τελικό τεστ αξιολόγησης (όπως συνολική επίδοση και επίδοση σε κατηγορίες στρατηγικών) όσο και εντός των ομάδων.

Πίνακας 1: Μέσοι όροι και τυπικές αποκλίσεις (στην παρένθεση) των επιδόσεων των μαθητών % κατά ομάδα στις νοερές προσθέσεις και αφαιρέσεις διψήφιων αριθμών στο αρχικό και τελικό τεστ

	Κατηγορίες στρατηγικών	Νοερές στρατηγικές	**Τάξη Γ΄**	
			Ομάδα Ελέγχου	**Πειραματική Ομάδα**
Αρχικό τεστ	χαμηλού επιπέδου	κάθετη πράξη	30,77 (18,79)	31,62 (23,84)
	υψηλού επιπέδου	1010	5,76 (16,29)	14,71 (23,48)
		N10	3,85 (13,12)	0,00 (0,00)
		άλλες στρατηγικές	0,00 (0,00)	0,72 (3,03)
	Συνολική επίδοση		40,38 (14,70)	47,05 (17,41)
Τελικό τεστ	Χαμηλού επιπέδου	Κάθετη πράξη	32,69 (25,51)	17,64 (31,26)
	υψηλού επιπέδου	1010	13,94 (27,00)	26,47 (33,03)
		N10	0,00 (0,00)	44,12 (44,65)
		Άλλες στρατηγικές	0,00 (0,00)	0,00 (0,00)
	Συνολική επίδοση		46,63 (20,78)	88,23 (12,86)

Παρατηρώντας τις επιδόσεις των ομάδων ελέγχου-πειραματικής στο αρχικό τεστ διαπιστώνεται ότι οι επιδόσεις των δύο ομάδων είναι περίπου ίσες και δεν διαφέρουν στατιστικώς σημαντικά {$t(41) = 1,35$ με $p= 0,184$}, γεγονός που δείχνει ότι το γνωστικό επίπεδο των δύο ομάδων είναι εξισωμένο και η έρευνα που πραγματοποιήθηκε έγινε σε παιδιά με παρόμοιο εκπαιδευτικό υπόβαθρο. Έτσι φαίνεται ότι οι δύο ομάδες είναι ισοδύναμες, ως προς το επίπεδο γνώσεων, πράγμα σημαντικό για τη συνέχεια της έρευνας (Robson, 2007).

Εξετάζοντας τις επιδόσεις των δύο ομάδων μετά τη διδακτική παρέμβαση, φαίνεται πως οι επιδόσεις των μαθητών της πειραματικής ομάδας στην τελική φάση της αξιολόγησης βελτιώθηκαν στατιστικώς σημαντικά σε σχέση με τις αντίστοιχες της ομάδας ελέγχου {t(16)= 10,35 με p=0,000}. Η βελτίωση της επίδοσης της πειραματικής ομάδας ενδεχομένως να οφείλεται στην παρέμβαση που πραγματοποιήθηκε στην πειραματική ομάδα, και συγκεκριμένα στην προώθηση της στρατηγικής Ν10 συνδυαστικά με τη χρήση της «άδειας αριθμογραμμής».

Το παραπάνω συμπέρασμα ενισχύεται, αν μελετήσουμε επισταμένως τις στρατηγικές που χρησιμοποίησε η πειραματική ομάδα στο αρχικό και τελικό τεστ. Παρατηρείται, λοιπόν, ότι οι μαθητές στο τελικό τεστ να επιλέγουν σε σημαντικό βαθμό τη στρατηγική Ν10 σε σχέση με το αρχικό τεστ {t(16)=4,07 με p=0,001}, η οποία, σύμφωνα με έρευνες, έχει αποδειχθεί ότι οδηγεί σε λιγότερα λάθη κυρίως στις αφαιρέσεις με κρατούμενο (Blote et al., 2000˙ Macintyre & Forrester, 2003˙ Καραντζής και συνεργάτες, 2010). Οι μαθητές διδάχθηκαν και εξασκήθηκαν, κατά τη διδακτική παρέμβαση, με τη στρατηγική Ν10 μέσω της «άδειας αριθμογραμμής», την οποία φαίνεται ότι χρησιμοποίησαν κατά τη διεξαγωγή του τελικού τεστ μειώνοντας τα λάθη και βελτιώνοντας την επίδοσή τους. Επιπλέον, γίνεται αντιληπτό ότι το μεγαλύτερο ποσοστό των μαθητών που χρησιμοποιούσε το γραπτό αλγόριθμο στο αρχικό τεστ (ΜΟ $^{\text{αρχικό τεστ}}$ = 31,61%) έχει εγκαταλείψει σε μεγάλο βαθμό τη συγκεκριμένη στρατηγική στο τελικό τεστ (ΜΟ $^{\text{τελικό τεστ}}$ = 17,64%) και άρχισε να υιοθετεί τη στρατηγική 1010 (ΜΟ $^{\text{αρχικό τεστ}}$ = 14, 71% και ΜΟ $^{\text{τελικό τεστ}}$ = 26,47%) και ιδιαιτέρως τη στρατηγική Ν10 (ΜΟ $^{\text{αρχικό τεστ}}$ =0 % και ΜΟ $^{\text{τελικό τεστ}}$ = 44,12%), την οποία κανείς τους δε χρησιμοποιούσε αρχικά. Από τα ανωτέρω διαφαίνεται ότι ίσως η χρήση της «άδειας αριθμογραμμής» να λειτούργησε ως ένα αποτελεσματικό εργαλείο, γεγονός που επισημαίνεται από ένα μεγάλο πλήθος ερευνητών (White & Singh, 2005˙ McIntosh, 2005˙ Καραντζής και συνεργάτες, 2010˙ Καραντζής και συνεργάτες, 2011).

Είναι αξιοσημείωτο ότι στην ομάδα ελέγχου δεν παρατηρήθηκε στατιστικώς σημαντική διαφορά στις επιδόσεις των μαθητών μεταξύ του αρχικού και τελικού τεστ αξιολόγησης (t(25)=1,759 με p=0,091). Αυτό ίσως να οφείλεται στο ότι δεν έγινε διδακτική παρέμβαση σε αυτή την ομάδα. Ωστόσο, σημειώνεται στο συνολικό μέσο όρο μια μικρή αύξηση της επίδοσης της ομάδας ελέγχου στο τελικό τεστ (χωρίς να υπάρχει στατιστικώς σημαντική διαφορά), ενδεχομένως λόγω της ωρίμανσης των μαθητών και της διδασκαλίας στο χρονικό διάστημα που μεσολάβησε από το αρχικό μέχρι το τελικό τεστ.

Το γεγονός ότι οι επιδόσεις των «αδύναμων» μαθητών στην αριθμητική της πειραματικής ομάδας βελτιώθηκαν σημαντικά, λόγω της διδακτικής πα-

ρέμβασης που πραγματοποιήθηκε, ανακύπτουν ζητήματα τόσο για την εκτενέστερη ενασχόλησή τους με το νοερό υπολογισμό στη σύγχρονη σχολική τάξη όσο και για τα μέσα της διδασκαλίας. Η ενασχόληση με τους νοερούς υπολογισμούς βελτιώνει τις επιδόσεις των μαθητών, καθώς μέσω της παρέμβασης με τη βοήθεια της «άδειας αριθμογραμμής» και με την εφαρμογή της στρατηγικής Ν10, παρατηρείται αφενός αύξηση των ποσοστών επιτυχίας τους και αφετέρου αυτοί οδηγούνται στη χρήση εναλλακτικών στρατηγικών, γεγονός που επιβεβαιώνεται από την έρευνα (Heirdsfield, 2004; Bobis, 1991; Hartnett, 2007). Εκτός τούτου, οι «αδύναμοι» μαθητές στην αριθμητική βοηθιούνται και υιοθετούν μια στρατηγική υψηλού επιπέδου (στην προκειμένη περίπτωση τη στρατηγική Ν10) που βελτιώνει τις επιδόσεις τους μειώνοντας τα λάθη και την υπερφόρτωση της εργαζόμενης μνήμης που πραγματώνεται κατά τη χρήση άλλων στρατηγικών (π.χ. γραπτός αλγόριθμος ή ακόμη και της στρατηγικής 1010), δεδομένου ότι λιγότερα νοερά βήματα σημαίνει λιγότερο γνωστικό φορτίο στην εργαζόμενη μνήμη κατά τη διάρκεια εκτέλεσης των νοερών αριθμητικών υπολογισμών (Wolters, Beishizen, Broers & Knoppert, 1990). Ωστόσο, η στρατηγική Ν10 δεν αποτελεί πανάκεια, καθώς οι μαθητές καλούνται να είναι ευέλικτοι και να επιλέγουν τη στρατηγική τους σε σχέση με τα χαρακτηριστικά του προβλήματος. Οφείλουμε να τονίσουμε ότι, παρόλο που η παρέμβαση που πραγματοποιήσαμε ήταν μικρής χρονικής διάρκειας, τα αποτελέσματα της έρευνας μας ήταν θετικά και ενθαρρυντικά και τίθεται το έναυσμα για περαιτέρω διερεύνηση και από άλλες έρευνες που μπορούν να πραγματοποιηθούν μελλοντικά με περισσότερους συμμετέχοντες και μάλιστα να έχουν διαχρονικό χαρακτήρα.

Βιβλιογραφία

Askew, M. and Brown, M. (2006). How do we teach children to be numerate? *British Educational Research Association, A Professional User Review of UK research*.

Blote, A., Klein, A., Beishuizen, M. (2000). Mental computation and conceptual understanding. *Learning and Instruction, 10*, 221–247.

Bobis, J. (1991). The effect of instruction on the development of computational estimation strategies. *Mathematics Education Research Journal, 3*(1),17-29

Cohen, L. & Manion, L. (1994). *Research methods in education*. London and New York: Routledge.

Hartnett, J. (2007). Categorisation of Mental Computation Strategies to Support Teaching and to Encourage Classroom Dialogue. *Proceedings of the 30th annual conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia (p.p.345-352)*, J. Watson & K. Beswick (Eds), MERGA

Heirdsfield A. (2000) "Mental computation: Is it more than mental architecture?" *Centre for Mathematics and Science Education Queensland University of Technology*.

Heirdsfield, A. (2004) *Putting research into practice: A case in mental computation.* In: 10th International Congress on Mathematics Education, July, Copenhagen, Denmark.

Heirdsfield, A. and Cooper, T. (2004). Inaccurate Mental addition and subtraction: Causes and Compensation. *Focus on Learning Problems in Mathematics, 26* (3), 43-65.

Καραντζής, Ι. & Τόλλου, Μ. (2009). Ο νοερός αριθμητικός υπολογισμός των μαθητών της Γ΄ τάξης του δημοτικού σχολείου στις προσθέσεις και αφαιρέσεις διψήφιων αριθμών. *Παιδαγωγική Επιθεώρηση, 48*, 107-123.

Καραντζής Ι., Δεσποτοπούλου Α., Σμάνη Α.(2010). Οι νοεροί αριθμητικοί υπολογισμοί στην πρόσθεση και αφαίρεση διψήφιων αριθμών. Ανάλυση των λαθών των μαθητών της Γ΄ και Δ΄ τάξης του δημοτικού σχολείου. *Πρακτικά του 7ου Πανελληνίου Συνεδρίου της Παιδαγωγικής Εταιρείας Ελλάδος (Υπό έκδοση)*.

Καραντζής, Ι., Αγγελόπουλος, Γ. Αυγερινός, Φ., Μπακοπούλου, Ι., Νταλιακούρας, Μ. (2011). Η επίδραση της «άδειας αριθμογραμμής» στο νοερό υπολογισμό προσθέσεων και αφαιρέσεων διψήφιων αριθμών. *Πρακτικά του 4ου συνεδρίου ΕΝΕΔΙΜ*, 163-172.

Κολέζα, Ε. (2009). *Θεωρία και Πράξη στη διδασκαλία των Μαθηματικών* (β΄ έκδοση). Αθήνα: Τόπος.

Klein, A.S., Beishuizen,M. and Treffers, A.(1998). The Empty Number Line in Dutch Second Grades: *Realistic* Versus *Gradual* Program Design. *Journal for Research in Mathematics Education. 29* (4), 443–464

Lemonidis, Ch. (2008). Longitudinal study on mental calculation development during the two first grades of primary school. *International journal for mathematics in Education, v1*. Hellenic Mathematical Society, Athens.

Λεμονίδης, Χ. & Λυγούρας, Γ. (2008). Η επίδοση και η ευελιξία μαθητών της τρίτης τάξης δημοτικού στους νοερούς υπολογισμούς, *Ευκλείδης Γ,* 68, 20-44.

Macintyre, T. and Forrester, R. (2003). Strategies for Mental Calculation, In J. Williams (Ed.), *Proceedings of the British Society for Research into Learning Mathematics, 23* (2), 49-54.

Maclellan, E. (2001). Mental Calculation. its place in the development of numeracy. *Westminster Studies in Education, 24*(2), 145-154.

McIntosh, A, (2005). *Developing computation*. Hobart: Department of Education, Tasmania.

McIntosh, A. (2006). Mental computation of school-aged students: Assessment, performance levels and common errors. Ανακτήθηκε January 18, 2011 από *http://www.mai.liu.se/SMDF/madif5/papers/ McIntosh.pdf*.

Robson, C. (2007). *Η έρευνα του πραγματικού κόσμου: Ένα μέσο για κοινωνικούς επιστήμονες και επαγγελματίες ερευνητές*. Αθήνα: Gutenberg

Thompson, I. (1995). The role of counting in the idiosyncratic mental calculation algorithms of young children. *European Early Childhood Education Research Journal, 3*, 5-16

Varol, F.and Farran, D. (2007). Elementary School Students' Mental Computation Proficiencies. *Early Childhood Education Journal, 35*(1), 89-94.

Van de Walle, 2005. *Μαθηματικά για το Δημοτικό και το Γυμνάσιο: Μια εξελικτική Διδασκαλία* (μετάφραση), Αθήνα: Gutenberg.

White, A. & Singh P. (2005). Computation in the primary mathematics classroom: Going mental. *In ICMI East Asia regional Conference on Mathematics Education, Aug. 7 – 12, 2005,* China.

Wolters G.,Beishuizen M.,Broers G. and Knoppert (1990). Mental arithmetic: Effects of calculation procedure and problem difficulty on solution latency. *Journal of Experimental Child Psychology, 49*, 20-30.

Abstract

The purpose of the present study was to investigate whether an instructive intervention for 3rd grade students in the mental calculation of additions and subtractions of two-digit numbers promoting the N10 strategic through the use of the "empty number-line" improves the performance of low math achieving students. Forty three students participated in this research, the results of which showed that the use of the N10 strategic through the use of "empty number-line" improves significantly the performance low math achieving students in the mental calculation of additions and subtractions of two-digit numbers.

Ιωάννης Δ. Καραντζής
Επίκουρος Καθηγητής στο ΠΤΔΕ Πανεπιστημίου Πατρών
Κανακάρη Ρούφου 31, 26223 Πάτρα
Τηλέφωνο: 6977753794 και 2610436410, e-mail: karantzis@upatras.gr

Γεώργιος Αγγελόπουλος και Ιωάννα Μπακοπούλου
Πτυχιούχοι ΠΤΔΕ Πανεπιστημίου Πατρών