

ΔΙΚΑΙΟΥ Ε. ΤΣΕΡΚΕΖΟΥ

ΕΚΤΙΜΗΣΗ ΔΥΝΑΜΙΚΩΝ ΚΑΙ ΣΤΑΤΙΚΩΝ ΟΙΚΟΝΟΜΕΤΡΙΚΩΝ
ΥΠΟΔΕΙΓΜΑΤΩΝ ΧΡΗΣΙΜΟΠΟΙΩΝΤΑΣ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΜΕ
ΔΙΑΦΟΡΗ ΧΡΟΝΙΚΗ ΑΘΡΟΙΣΤΙΚΟΤΗΤΑ,
ΜΕΡΙΚΑ ΜΟΝΤΕ-CARLO ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ

Περίληψη

Εισαγωγή

1. Βασικές σχέσεις χρονικής αθροιστικότητας
2. Μέθοδος της μέγιστης πιθανοφάνειας στην εκτίμηση υποδειγμάτων με διάφορη χρονική αθροιστικότητα
 - 2.1. Αυτοπαλίνδρομο σχήμα με αυτοσυσχετιζόμενα κατάλοιπα (Autoregressive Model with Autocorrelated Residuals)
 - 2.2. Το ανεξάρτητο στοχαστικό γραμμικό υπόδειγμα (Independent Stochastic Linear Regression Model) και το μερικώς ανεξάρτητο στοχαστικό γραμμικό υπόδειγμα (Autoregressive Linear Stochastic Model)
 - 2.3. Το γραμμικό υπόδειγμα με αυτοσυσχετιζόμενα κατάλοιπα
 - 2.4. Το κλασικό κανονικό γραμμικό υπόδειγμα
3. Μερικά Monte-Carlo αποτελέσματα
4. Συμπεράσματα

Παράρτημα

Βιβλιογραφία

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Στην εργασία αυτή γίνεται μία θεωρητική και εμπειρική προσέγγιση του προβλήματος της χρονικής αθροιστικότητας σε επίπεδο μίας στοχαστικής εξίσωσης. Η θεωρητική προσέγγιση γίνεται χρησιμοποιώντας τη μέθοδο της Μεγίστης Πιθανοφάνειας σε μία σειρά από εναλλακτικά γραμμικά ή μη γραμμικά στις μεταβλητές και παραμέτρους υποδείγματα. Η εμπειρική προσέγγιση εξαντλείται στην εφαρμογή Monte-Carlo τεχνικών με βάση το Κλασικό Κανονικό Γραμμικό Υπόδειγμα, όπου παρουσιάζονται τα πλεονεκτήματα της προτεινόμενης μεθόδου χρονικής αθροιστικότητας.

Στην εφαρμογή της η οικονομετρική μεθοδολογία πολλές φορές αντιμετωπίζει έντονα προβλήματα. Ένα από αυτά τα προβλήματα είναι η έλλειψη στοιχείων σ' επιθυμητά επίπεδα χρονικής αθροιστικότητας ή αποαθροιστικότητας. Δεν είναι σπάνιο το φαινόμενο¹ να εγκαταλείπονται σημαντικές μελέτες, επειδή κάποιος ερευνητής, στην προσπάθειά του να εκτιμήσει ένα υπόδειγμα τριμηνιαίας βάσης, έχει κάποια ή κάποιες χρονολογικές σειρές (ανεξάρτητες ή εξηρημένες), διαθέσιμες μόνο σ' ετήσια βάση, για ένα μέρος τουλάχιστον του δείγματος εκτίμησης. Σ' αυτές τις περιπτώσεις είτε εκτιμά το υπόδειγμα χρησιμοποιώντας τις διαθέσιμες τριμηνιαίες παρατηρήσεις (αν αυτό είναι δυνατόν), είτε προσπαθεί (με κάποια μέθοδο) να προβλέψει αυτές τις ελλείψεις τριμηνιαίες παρατηρήσεις και να εκτιμήσει² το τριμηνιαίο υπόδειγμά του για όλη την περίοδο δείγματος εκτίμησης.

Για την πρόβλεψη των ελλειπόν (τριμηνιαίων) παρατηρήσεων έχουν κατά καιρούς προταθεί διάφορες μέθοδοι³, η παρουσίαση των οποίων εκφεύγει από τα όρια της παρούσας μελέτης. Στα μέρη που ακολουθούν παρουσιάζουμε μία μέθοδο, όπου οι ελλείψεις τριμηνιαίες παρατηρήσεις εκτιμώνται ταυτόχρονα με τις παραμέτρους του υπό εκτίμηση τριμηνιαίου υποδείγματος, λαμβάνοντας υπ' όψη τόσο τις ετήσιες παρατηρήσεις (αν υπάρχουν), όσο και τη μαθηματική και στοχαστική εξειδίκευση που συνδέει την εξηρημένη με τις ανεξάρτητες μεταβλητές. Η μέθοδος αυτή δίδει εκτιμήσεις Μεγίστης Πιθανοφάνειας και βασίζεται στις εργασίες των Anderson, Sargan και Drettakis, Gilbert, Tserkezos και πρόσφατα Stram και Wei.

Τη μέθοδο της Μεγίστης Πιθανοφάνειας την παρουσιάζουμε θεωρητικά για μία σειρά από Nested εξειδικεύσεις με βάση το υπόδειγμα ARARX(p) (Αυτοπαλίνδρομο Σχήμα με Αυτοσυσχετιζόμενα Κατάλοιπα), για να καταλήξουμε στο τέλος στη θεωρητική και εμπειρική (Monte-Carlo) παρουσίασή της με βάση το Κλασικό Κανονικό Γραμμικό Υπόδειγμα.

¹ Θα μπορούσε κανείς να αναφέρει το παράδειγμα της χώρας μας, όπου τριμηνιαίας βάσης στοιχεία για βασικές μακροοικονομικές μεταβλητές είναι διαθέσιμα μόλις μετά το 1975. Κάθε προσπάθεια μακροοικονομικής μοντελοποίησης με βάση τριμηνιαία στοιχεία στην Ελλάδα αποτυγχάνει λόγω αυτής της έλλειψης στοιχείων. Δεν είναι φυσικά με όλα αυτά ασυσχέτιστο το γεγονός ότι, ενώ έχουν δημιουργηθεί στην Ελλάδα αρκετά μακροοικονομικά υποδείγματα σ' ετήσια βάση, μέχρι σήμερα δεν έχει παρουσιασθεί αντίστοιχη εργασία σε μηνιαία ή τριμηνιαία βάση.

² Κάθε προσπάθεια εκτίμησης του τριμηνιαίας βάσης υποδείγματος, χρησιμοποιώντας ετήσια στοιχεία, θα είχε σημαντικές αρνητικές επιπτώσεις στις εκτιμήσεις. Για περισσότερα βλ. Moriguchi C., 1970, «Aggregation Over Time in Macroeconomic Relations», *International Economic Review*, Vol. 11, no 3, October, σελ. 427-439.

³ Μία ολοκληρωμένη παρουσίαση αυτών των μεθόδων γίνεται στη μελέτη Tserkezos D., 1984, *Simultaneous Use of Annual and Quarterly Data in Econometric Models*, Department of Econometrics, University of Manchester.

Η μελέτη αυτή αποτελείται από τέσσερα μέρη.

Στο μέρος 1 παρουσιάζουμε μία σειρά από σχέσεις χρονικής αθροιστικότητας. Στο μέρος 2 παρουσιάζουμε την εφαρμογή της μεθόδου της Μεγίστης Πιθανοφάνειας στην εκτίμηση υποδειγμάτων με ελλειπείς (τριμηνιαίες) παρατηρήσεις.

Τα υποδείγματα⁴ αυτά είναι:

- Αυτοπαλίνδρομο Σχήμα με Αυτοσυσχετιζόμενα Κατάλοιπα.
- Ανεξάρτητο Στοχαστικό Γραμμικό Υπόδειγμα.
- Μερικώς Ανεξάρτητο Στοχαστικό Γραμμικό Υπόδειγμα.
- Γραμμικό Υπόδειγμα με Αυτοσυσχετιζόμενα Κατάλοιπα.
- Το Κλασικό Κανονικό Γραμμικό Υπόδειγμα.

Στο μέρος 3 παρουσιάζουμε μερικά αποτελέσματα από μία σειρά Monte-Carlo πειραματισμούς, που έγιναν με βάση την εκτίμηση του Κλασικού Κανονικού Γραμμικού Υποδείγματος με ελλειπείς τριμηνιαίες παρατηρήσεις για μέρος μόνο του δείγματος εκτίμησης. Τα αποτελέσματα αυτά επικεντρώνονται στη χρησιμοποίηση ή μη της μεθόδου της Μεγίστης Πιθανοφάνειας σε σχέση με την εναλλακτική, δηλαδή τη μέθοδο εκτίμησης του τριμηνιαίου υποδείγματος μόνο για υποπεριόδους, όπου έχουμε διαθέσιμα τριμηνιαία στοιχεία.

Στο μέρος 4 δίδονται τα συμπεράσματα και μία σειρά από κατευθύνσεις για περαιτέρω θεωρητική και εμπειρική έρευνα.

1. ΒΑΣΙΚΕΣ ΣΧΕΣΕΙΣ ΧΡΟΝΙΚΗΣ ΑΘΡΟΙΣΤΙΚΟΤΗΤΑΣ

Μπορούμε να συσχετίσουμε τα δεδομένα ετήσιας βάσης με τα δεδομένα τριμηνιαίας βάσης, μιας μεταβλητής y , με την ακόλουθη σχέση:

$$y^a = C_T \cdot y^q \quad (1.1)$$

όπου:

y_T^a είναι ένα $(T/4 \times 1)$ διάνυσμα με τις $T/4$ ετήσιες παρατηρήσεις, y_T^q είναι ένα $T \times 1$ διάνυσμα με τις T τριμηνιαίες παρατηρήσεις και C_T είναι μια (αθροιστική) μήτρα διαστάσεων $(T/4 \times T)$ της μορφής:

⁴ Μία αναλυτική παρουσίαση αυτών των υποδειγμάτων δίδεται στο βιβλίο του Θ. Γκαμαλέτσου, 1973, *Οικονομετρία*, στις σελίδες 240-248, 220-233, 233-237, 199-214 και 161-172 αντιστοίχως.

$$C_T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad (1.2)$$

Ορίζοντας $e'_4 = (1, 1, 1, 1)$ (1.3)
 μπορούμε να γράψουμε τη μήτρα C_T ως:

$$C_T = (I_{T/4} \otimes e'_4) \quad (1.4)$$

όπου $I_{T/4}$ είναι μία μοναδιαία μήτρα διαστάσεων $(T/4 \times T/4)$ και \otimes συμβολίζει το γινόμενο του Kronecker⁵.

Με βάση τα παραπάνω, δημιουργούμε τις παρακάτω σχέσεις χρονικής αθροιστικότητας:

$$C_T C_T' = (I_{T/4} \otimes e'_4) (I_{T/4} \otimes e'_4)' = (I_{T/4} \otimes e'_4 e_4) = 4 I_{T/4} \quad (1.5)$$

$$C_T' C_T = (I_{T/4} \otimes e_4 e'_4) = \begin{bmatrix} \begin{array}{c|c} \begin{matrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{matrix} & \begin{matrix} \bigcirc \end{matrix} \\ \hline \begin{matrix} \diagdown \end{matrix} & \begin{matrix} \diagup \end{matrix} \\ \hline \begin{matrix} \bigcirc \end{matrix} & \begin{matrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{matrix} \end{array} \end{bmatrix} = J \quad (1.6)$$

όπου J είναι μία block-diagonal μήτρα με (4×4) μοναδιαίες υπομήτρες ως στοιχεία της διαγωνίου της, και 0 όλα τα άλλα στοιχεία.

$$\begin{aligned} C_T' (C_T C_T')^{-1} C_T &= (I_{T/4} \otimes e'_4)' (4I_{T/4})^{-1} (I_{T/4} \otimes e'_4) = \\ &= (I_{T/4} \otimes e_4 e'_4) = 1/4 C_T' C_T \end{aligned} \quad (1.7)$$

⁵ Harvey A.C., 1981, *The Econometric Analysis of Time Series*, σελ. 358-359.

Μία άλλη σημαντική σχέση χρονικής αθροιστικότητας, η οποία συσχετίζει το διάνυσμα των τριμηνιαίων μέσων \bar{y}^Q με τα τριμηνιαίας βάσης δεδομένα y^Q , είναι η ακόλουθη:

$$\bar{y}^Q = C_T'(C_T C_T')^{-1} C_T y^Q = 1/4 J_T y^Q \tag{1.8}$$

Η σχέση μεταξύ των ετήσιας βάσης δεδομένων και των τριμηνιαίων μέσων \bar{y}_1^Q είναι:

Από τη σχέση (1.8) $\bar{y}^Q = C_T(C_T C_T')^{-1} C_T y^Q \Rightarrow$
 $\Rightarrow C_T y^Q = (C_T C_T')(C_T C_T')^{-1} C_T y^Q$ (1.9)
 $C_T \bar{y}^Q = y^a$

Βασιζόμενοι στις σχέσεις που προηγήθηκαν, μπορούμε να αποδείξουμε δύο ισότητες χρονικής αθροιστικότητας:

$$(1/4) y^{a'} y^a = (1/4) (C_T y_1^Q)' (C_T \bar{y}^Q) = 1/4 \bar{y}^Q C_T' C_T \bar{y}^Q \tag{1.10}$$

και χρησιμοποιώντας τη σχέση $C_T' C_T = 4 I_{T/4}$, μπορούμε να γράψουμε:

$$(1/4) y^{a'} y^a = (1/4) \bar{y}^Q' \cdot 4 I_{T/4} \bar{y}^Q = \bar{y}^Q' \cdot \bar{y}^Q \tag{1.11}$$

οι σχέσεις (1.1) έως (1.11) ισχύουν για κάθε μεταβλητή. Για κάθε μεταβλητή (έστω X) ισχύει:

$$1/4 X^a' y^a = \bar{X}^Q' \cdot \bar{y}^Q \tag{1.12}$$

Τέλος, σε περίπτωση που η χρονική αθροιστικότητα αναφέρεται σε μηνιαίο και ετήσιο επίπεδο, η μήτρα C_T είναι της μορφής:

$$C_T = \begin{bmatrix} 111111111111000000000000.....000000000000 \\ 000000000000111111111111.....000000000000 \\ 000000000000000000000000000000..000000000000 \\ \\ \\ \\ 000000000000.....000000000000111111111111 \end{bmatrix}$$

2. ΜΕΘΟΔΟΣ ΤΗΣ ΜΕΓΙΣΤΗΣ ΠΙΘΑΝΟΦΑΝΕΙΑΣ ΣΤΗΝ ΕΚΤΙΜΗΣΗ ΥΠΟΔΕΙΓΜΑΤΩΝ ΜΕ ΔΙΑΦΟΡΗ ΧΡΟΝΙΚΗ ΑΘΡΟΙΣΤΙΚΟΤΗΤΑ

Στο μέρος αυτό παρουσιάζουμε την εφαρμογή της μεθόδου της Μεγίστης Πιθανοφάνειας στην εκτίμηση υποδειγμάτων με διάφορη χρονική αθροιστικότητα. Η μέθοδος αυτή εφαρμόζεται στην εκτίμηση μιας σειράς από Nested υποδειγμάτων με βάση το Αυτοπαλίνδρομο Σχήμα⁶ με Αυτοσυσχετιζόμενα Κατάλοιπα (ARARX(p)).

Για διάφορες υποθέσεις, που αφορούν τόσο τα δυναμικά χαρακτηριστικά του υποδείγματος όσο και την ύπαρξη ή μη αυτοσυσχέτισης, παρουσιάζουμε τη μέθοδο της Μεγίστης Πιθανοφάνειας για την εκτίμηση υποδειγμάτων με διάφορη χρονική αθροιστικότητα, για τις εξής εξειδικεύσεις:

- Το Ανεξάρτητο Στοχαστικό Γραμμικό Υπόδειγμα.
- Το Μερικώς Ανεξάρτητο Στοχαστικό Γραμμικό Υπόδειγμα.
- Το Γραμμικό Υπόδειγμα με Αυτοσυσχετιζόμενα Κατάλοιπα και τέλος το
- Κλασικό Κανονικό Γραμμικό Υπόδειγμα.

2.1. Αυτοπαλίνδρομο Σχήμα με Αυτοσυσχετιζόμενα Κατάλοιπα (Autoregressive Model with Autocorrelated Residuals)

Το Υπόδειγμα ARARX(p)

Το υπόδειγμα ARARX(p) βασίζεται σε μία εξειδίκευση της μορφής:

$$\left. \begin{aligned} y_t &= \sum_{i=1}^m a_i y_{t-i} + X_t' b + u_t \quad t=1,2,\dots,T \\ u_t &= \rho_1 u_{t-1} + \rho_2 u_{t-2} + \dots + \rho_p u_{t-p} + e_t \\ e_t &\sim \text{NID}(0, \sigma_e^2) \end{aligned} \right\} \rightarrow (2.1)$$

Το παραπάνω υπόδειγμα μπορεί να παρουσιαστεί χρησιμοποιώντας άλγεβρα ισηρών:

$$y = Ya + Xb + u \quad (2.2)$$

$$Ru + R^*u^* = e \quad (2.3)$$

$$E(e) = 0 \quad (2.4)$$

⁶ ARARX(p): Autoregressive Model with Autocorrelated Residuals για περισσότερα: Harvey A.C., 1981, *The Econometric Analysis of Time Series*, σελ. 350-355.

$$\text{και} \quad e_t \sim \text{NID}(0, \sigma_e^2) \quad (2.10)$$

Μετά από μια σειρά από απλούς αλγεβρικούς χειρισμούς, μπορούμε να γράψουμε το υπόδειγμα (2.8) – (2.10) στην εξής αυτοπαλίνδρομη μορφή:

$$y_t = (a+p) y_{t-1} - a p y_{t-2} + b' X_t - p b' X_{t-1} + e_t \quad (2.11)$$

με το e_t να έχει τις ίδιες στοχαστικές ιδιότητες με αυτές της σχέσης (2.10).

Ακολουθώντας την τεχνική της Μεγίστης Πιθανοφάνειας⁷, οι εκτιμήσεις των ελλিপών (τριμηνιαίων) παρατηρήσεων της εξηρητημένης μεταβλητής θα γίνουν ταυτόχρονα με τις υπό εκτίμηση παραμέτρους του υποδείγματος (2.8). Ειδικότερα, μεγιστοποιούμε τη δεσμευμένη συνάρτηση πιθανότητας για όλη τη χρονική περίοδο ($T_1 + T_2 = T$) λαμβάνοντας τις ελλείψεις (τριμηνιαίες) παρατηρήσεις ως παραμέτρους, οι οποίες θα πρέπει να εκτιμηθούν ταυτόχρονα με τις παραμέτρους του υποδείγματος (2.8), λαμβάνοντας υπ' όψη τόσο την πληροφόρηση που παρέχεται από τα υπάρχοντα ετήσια στοιχεία (για την y_t την περίοδο T_1) όσο και τη μαθηματική και στοχαστική εξειδίκευση που συνδέει την εξηρητημένη με τις αντίστοιχες ανεξάρτητες μεταβλητές.

Υποθέτοντας ότι $u^* = 0$, η συνάρτηση των ελαχίστων τετραγώνων των καταλοίπων e_t , $\Phi = (y_1, a, b, p)$, είναι:

$$\Phi = (y_1, a, b, p) = \sum_{t=3}^T (y_t - (a+p)y_{t-1} + apy_{t-2} - b'X_t + pb'X_{t-1})^2 \quad (2.12)$$

Τη σχέση (2.12) ελαχιστοποιούμε τόσο σε σχέση με τις ελλείψεις (τριμηνιαίες) παρατηρήσεις y_t όσο και με τις παραμέτρους του υποδείγματος, υπό τον περιορισμό των διαθέσιμων ετήσιων περιορισμών:

$$C y_1 = y_1^a \quad (2.13)$$

Για την ελαχιστοποίηση της (2.12) υπό τους περιορισμούς (2.13) χρησιμοποιούμε μια Lagrangian τεχνική ελαχιστοποίησης:

$$L_{\text{LAGR}} = \Phi(y_1, a, b, p) - 2\lambda' (y_1^a - C y_1) \quad (2.14)$$

όπου:

⁷ Η μέθοδος της Μεγίστης Πιθανοφάνειας παρουσιάζεται στις εργασίες Sargan και Drettakis, 1974, «Missing Data in an Autoregressive Model», *International Economic Review*, Gilbert C.L., 1977, «Estimation of Regression Equations Using Mixed Annual and Quarterly data», *Journal of Econometrics*, και Tserkezos Dik., 1984, *Simultaneous Use of Annual and Quarterly Data in Econometric Models*, M.A. Thesis, University of Manchester.

λ: είναι $(T_{1/4} \times 4)$ ένα διάνυσμα με τους πολλαπλασιαστές του Lagrange.

Διαφορίζοντας τη (2.14) σε σχέση με το y_1 και μετά από μια σειρά από αλγεβρικούς χειρισμούς⁸, λαμβάνουμε την υπό περιορισμούς (constrained) εξίσωση:

$$M(a, p) y_1 - F(a, b, p, X_{+1}, X_{+2}, y_0, y_{-1}) - C' \lambda = 0 \tag{2.15}$$

όπου:

$$M(a,p) = \begin{bmatrix} m_1 & m_2 & m_3 & \begin{matrix} \diagdown \\ \diagup \end{matrix} \\ m_2 & m_2 & m_3 & \begin{matrix} \diagdown \\ \diagup \end{matrix} \\ m_3 & m_3 & m_2 & \begin{matrix} \diagdown \\ \diagup \end{matrix} \\ \begin{matrix} \diagdown \\ \diagup \end{matrix} & m_3 & m_2 & m_1 \end{bmatrix} \tag{2.16}$$

$$F(a,b,\dots) = \begin{bmatrix} b'X_1 - (a+p) b'X_2 + ap b'X_3 - ap y_{-1} + (1+ap)(a+p)y_0 \\ b'X_2 - (a+p) b'X_3 + ap b'X_4 - ap y_0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ b'X_{T1+1} - (a+p) b'X_{T1+1} + ap b'X_{T1+1} - ap y_{T1+2} + (1+ap)(a+p)y_{T1+1} \end{bmatrix} \tag{2.17}$$

$$\text{και} \quad \left. \begin{matrix} m_1 = 1 + (a+p)^2 + (ap)^2 \\ m_2 = -(1+ap)(a+p) \\ m_3 = ap. \end{matrix} \right\} \rightarrow \tag{2.18}$$

Παρατηρώντας ότι $\text{Det } N(a,p)^9 \neq 0$, μπορούμε να γράψουμε τη (2.15) ως:

⁸ Sargan J.D. και Drettakis E., 1977, «Missing Data in an Autoregressive Model», σελ. 42-44, Gilbert C.L., 1977, «Estimation of Regression Equations Using Mixed Annual and Quarterly data», σελ. 225.
⁹ Det = Ορίζουσα.

$$y_1 - M^{-1} F - M^{-1} C' \lambda = 0 \quad (2.19)$$

(Για απλοποίηση της παρουσίασης, παραλείπουμε τους δείκτες, όπου δεν χρειάζεται).

Πολλαπλασιάζοντας τη (2.19) επί C λαμβάνουμε:

$$C y_1 - C M^{-1} F - C M^{-1} C' \lambda = 0 \quad (2.20)$$

λύνοντας ως προς:

$$\lambda = (C M^{-1} C')^{-1} (C y_1 - C M^{-1} F) \quad (2.21)$$

και αντικαθιστώντας το λ στη (2.19), λαμβάνουμε:

$$y_1 - M^{-1} F - M^{-1} C (C M^{-1} C')^{-1} (C y_1 - C M^{-1} F) = 0 \quad (2.22)$$

$$y_1 = M^{-1} C' (C M^{-1} C')^{-1} C y_1 + (I - M^{-1} C' (C M^{-1} C')^{-1} C) M^{-1} F \quad (2.23)$$

εάν γράψουμε:

$$\begin{matrix} (T_1 \times T_1) \\ G(a, p) = M^{-1} C' (C M^{-1} C')^{-1} C \end{matrix} \quad (2.24)$$

μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε

$$C y_1 = y_1^a = C \bar{y}_1 \quad \text{για να γράψουμε τη (2.23) ως:}$$

$$\hat{y}_1 = G(\hat{a}, \hat{p}) \bar{y}_1 + (I - G(\hat{a}, \hat{p})) M^{-1} F \quad (2.25)$$

Γνωρίζοντας $\hat{a}, \hat{b}, \hat{p}, y_0, y_{-1}, X_{+1}, X_{+2}$ μπορούμε να λύσουμε τη (2.25) ως προς τις ελλειπείς παρατηρήσεις \hat{y}_1 . Αυτό συνεπάγεται μία Gauss-Seidel¹⁰ επαναληπτική διαδικασία για την εκτίμηση του \hat{y}_1 . Τα \hat{a} , \hat{b} και \hat{p} μπορούν να εκτιμηθούν από το υπόδειγμα (2.8)–(2.10) για την περίοδο T_2 , όπου διαθέσιμα (τριμηνιαία) στοιχεία είναι διαθέσιμα σύμφωνα με τις υποθέσεις που έγιναν.

Για την παρουσίαση όλης της επαναληπτικής διαδικασίας μπορούμε να γράψουμε το υπόδειγμα (2.8) – (2.10) σε μορφή μητρών ως:

$$y = Zc + u \quad (2.26)$$

$$Ru + e \quad (2.27)$$

¹⁰ Judge, Hill, Griffiths, Lutkepohl and Lee, 1982, *Introduction to the theory and practice of Econometrics*, σελ. 415-420.

$$e \sim \text{NID}(0, \sigma_e^2 I_T) \quad (2.28)$$

και

$$Z = [Y : X], \quad c = (a \ b)' \quad (2.29)$$

πολλαπλασιάζοντας τη (2.26) με R, λαμβάνουμε:

$$R(y - Zc) = Ru = e \quad (2.30)$$

η log-likelihood συνάρτηση του υποδείγματος (2.30) είναι:

$$L = -\frac{T}{2} \log 2\pi - \frac{T}{2} \log \sigma_e^2 - \frac{1}{2\sigma_e^2} (y - Zc)' R' R (y - Zc) \quad (2.31)$$

Για να λάβουμε Μεγίστης Πιθανότητας εκτιμήσεις για $\theta = (a, b, \rho)$, πρέπει να χρησιμοποιήσουμε μία Gauss-Newton¹¹ επαναληπτική διαδικασία για την ελαχιστοποίηση της

$$S = e' e \quad (2.32)$$

με $e = R(y - Zc) = f(\theta)$ (συνάρτηση των παραμέτρων) πραγματοποιώντας μία Taylor expansion της $e = f(\theta)$ κοντά σε κάποια τιμή, έστω $\tilde{\theta}$.

$$e = \tilde{e} + \frac{\partial e}{\partial \theta} \Big|_{\tilde{\theta}} (\theta - \tilde{\theta}) + \dots \quad (2.33)$$

$$\text{έτσι} \quad \text{Min}(e'e) = \text{Min} \left(\tilde{e} + \frac{\partial e}{\partial \theta} \Big|_{\tilde{\theta}} (\theta - \tilde{\theta}) \right)' \left(\tilde{e} + \frac{\partial e}{\partial \theta} \Big|_{\tilde{\theta}} (\theta - \tilde{\theta}) \right) \quad (2.34)$$

μας δίδει:

$$(\hat{\theta} - \tilde{\theta}) = - \left[\frac{\partial e}{\partial \theta} \Big|_{\tilde{\theta}}' \frac{\partial e}{\partial \theta} \Big|_{\tilde{\theta}} \right]^{-1} \frac{\partial e}{\partial \theta} \Big|_{\tilde{\theta}}' \tilde{e} \quad (2.35)$$

$$\eta \quad \hat{\theta} = \tilde{\theta} - \left[\frac{\partial e}{\partial \theta} \Big|_{\tilde{\theta}}' \frac{\partial e}{\partial \theta} \Big|_{\tilde{\theta}} \right]^{-1} \frac{\partial e}{\partial \theta} \Big|_{\tilde{\theta}}' \tilde{e} \quad (2.36)$$

¹¹ Judge, Hill, Griffiths, Lutkepohl και Lee, 1982, *Introduction to the theory and practice of Econometrics*, σελ. 450-455.

Για να λάβουμε συνεπείς αρχικές τιμές για το θ , μπορούμε να εφαρμόσουμε μία τεχνική βοηθητικών¹² μεταβλητών στο υπόδειγμα (2.26). Μπορούμε τότε να χρησιμοποιήσουμε τα κατάλοιπα $\hat{u}_t = y_t - Z_t\tilde{c}$ για να εκτιμήσουμε το ρ χρησιμοποιώντας τον τύπο:

$$\tilde{\rho} = \frac{\sum_{t=2}^T \hat{u}_t \hat{u}_{t-1}}{\sum_{t=2}^T \hat{u}_{t-1}^2} \quad (2.37)$$

όπου $\tilde{c} = (\tilde{a}, \tilde{b})$ είναι οι βοηθητικών μεταβλητών εκτιμήσεις (Instrumental Variables) της (2.26).

Μπορούμε τώρα, χρησιμοποιώντας μία Gauss-Seidel επαναληπτική τεχνική, να παρουσιάσουμε τη συνολική διαδικασία για να εκτιμήσουμε ταυτόχρονα τις ελλίπεις (μηνιαίες ή τριμηνιαίες) παρατηρήσεις και τις παραμέτρους του υποδείγματος ως εξής:

Βήμα 1. Εφαρμόζουμε μία βοηθητικών μεταβλητών τεχνική στη (2.28), για να λάβουμε $\tilde{c} = (\tilde{a}, \tilde{b})'$ και μέσω της (2.37) μία εκτίμηση του ρ , χρησιμοποιώντας τις T_2 (μηνιαίες ή τριμηνιαίες) παρατηρήσεις.

Βήμα 2. Λαμβάνουμε μία πρώτη εκτίμηση των ελλίπων (τριμηνιαίων) παρατηρήσεων χρησιμοποιώντας τη

$$\hat{y}_{1r-1} = G(\hat{a}_{r-1}, \hat{\rho}_{r-1})\bar{y}_1 + [I - G(\hat{a}_{r-1}, \hat{\rho}_{r-1})]M^{-1}F(\hat{a}_{r-1}, \hat{b}_{r-1}, \dots) \quad (2.38)$$

Βήμα 3. Αντικαθιστούμε αυτές τις εκτιμήσεις στη (2.26) και εφαρμόζουμε την τεχνική των βοηθητικών μεταβλητών, για να λάβουμε αρχικές τιμές για την επαναληπτική υποδιαδικασία:

$$\hat{\theta}_r = \tilde{\theta}_{r-1} - \left[\frac{\partial e(\hat{y}_{1r-1})}{\partial \theta} \Big|_{\tilde{\theta}_{r-1}} \frac{\partial e(\hat{y}_{1r-1})}{\partial \theta} \Big|_{\tilde{\theta}_{r-1}} \right]^{-1} \frac{\partial e(\hat{y}_{1r-1})}{\partial \theta} \Big|_{\tilde{\theta}_{r-1}} \tilde{\theta}_{r-1} \quad (2.39)$$

Επαναλαμβάνουμε αυτή την επαναληπτική υποδιαδικασία μέχρι τη σύγκλιση, για να λάβουμε το $\hat{\theta}$. Καθορίζοντας

¹² Harvey A.C., 1981, *The Econometric Analysis of Time Series*, σελ. 77-81.

$$\hat{a}_{r-1} = \hat{a}_r, \hat{b}_{r-1} = \hat{b}_r, \hat{p}_{r-1} = \hat{p}_r$$

επιστρέφουμε στο Βήμα 2.

Επαναλαμβάνουμε την όλη επαναληπτική διαδικασία μέχρι τη σύγκλιση.

Η παραπάνω εισηγηθείσα επαναληπτική, τύπου Gauss–Seidel, τεχνική είναι πολύ «ακριβή» από πλευράς μαθηματικών υπολογισμών. Μπορούμε πάντως να την απλοποιήσουμε αντικαθιστώντας την με μία επαναληπτική Gauss–Newton υποδιαδικασία με ένα Residual Adjusted Aitken¹³ εκτιμητή, ο οποίος είναι και γνωστός ως Two–Step εκτιμητής του Hatanaka.

Ειδικότερα χρησιμοποιώντας ότι, *δεδομένων των αρχικών συνεπών εκτιμήσεων των a, b και p, μια επανάληψη της τεχνικής Gauss–Newton θα μας αποδώσει ασυμπτωτικά αποτελεσματικούς εκτιμητές*, μπορούμε να γράψουμε τη (2.39) ως:

$$\tilde{\theta}_t = -\frac{\partial e}{\partial a} \Big|_{\tilde{\theta}} (a - \tilde{a}) - \frac{\partial e}{\partial b} \Big|_{\tilde{\theta}} (b - \tilde{b}) - \frac{\partial e}{\partial p} \Big|_{\tilde{\theta}} (p - \tilde{p}) \quad (2.40)$$

Αντικαθιστώντας τις σχέσεις

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial e}{\partial a} \Big|_{\tilde{\theta}} &= -(y_{t-1} - \tilde{p}y_{t-2}) \\ \frac{\partial e}{\partial b} \Big|_{\tilde{\theta}} &= -(X_t - \tilde{p}X_{t-1}) \\ \frac{\partial e}{\partial p} \Big|_{\tilde{\theta}} &= -(y_{t-1} - \tilde{a}y_{t-2} - \tilde{b}X_{t-1}) = -\hat{u}_{t-1} \end{aligned} \right\} \rightarrow \quad (2.41)$$

$$\text{και} \quad \tilde{\theta}_t = y_t - \tilde{a}y_{t-1} - \tilde{b}X_t - \tilde{p}(y_{t-1} - \tilde{a}y_{t-2} - \tilde{b}X_{t-1}) \quad t=3, \dots, T \quad (2.42)$$

στη (2.40) λαμβάνουμε

$$y_t - \tilde{p}y_{t-1} = \tilde{a}(y_{t-1} - \tilde{p}y_{t-2}) + \tilde{b}(X_t - \tilde{p}X_{t-1}) + (p - \tilde{p})\tilde{u}_{t-1} \quad (2.43)$$

Παλινδρομώντας την $(y_t - \tilde{p}y_{t-1})$ με τις $(y_{t-1} - \tilde{p}y_{t-2})$, $(X_t - \tilde{p}X_{t-1})$ και \tilde{u}_{t-1} , λαμβάνουμε εκτιμήσεις των a και b με άμεσο τρόπο από τις εκτιμήσεις των $(y_{t-1} - \tilde{p}y_{t-2})$ και $(X_t - \tilde{p}X_{t-1})$. Εάν p είναι ο εκτιμητής του \tilde{u}_{t-1} , ο προερχόμενος εκ δύο βημάτων εκτιμητής¹⁴ του p είναι ίσος με $p + \tilde{p}$.

Φυσικά στην παραπάνω εισηγηθείσα Gauss–Seidel επαναληπτική τεχνική, προβλήματα όπως ο τρόπος αντιμετώπισης της $u^*=0$ παραμένουν για μι-

¹³ Hatanaka Michio, 1974, «An Efficient Two–Step Estimator for the Dynamic Adjustment Model with Autoregressive Errors», *Journal of Econometrics*, σελ. 199-220.

¹⁴ Harvey A.C., 1981, *The Econometric Analysis of Time Series*, σελ. 270.

κρά δείγματα και ειδικότερα όταν τα X_t παρουσιάζουν μακροχρόνια χρονική τάση¹⁵.

Για να εκτιμήσουμε τις ασυμπτωτικές διακυμάνσεις των εκτιμήσεων \hat{a} , \hat{b} , $\hat{\rho}$, $\hat{\gamma}_1$, $\hat{\sigma}^2$, χρειαζόμαστε να δημιουργήσουμε τη μήτρα πληροφόρησης:

$$I_c = \left[\frac{\partial^2 \log L}{\partial \theta \partial \theta'} \right]_{\hat{\theta}} \quad (2.44)$$

όπου L είναι η συνάρτηση πιθανότητας και $\theta = (y_1', a, b, \rho, \sigma^2)'$.

Φυσικά η παραπάνω διαδικασία εκτίμησης της μήτρας διακυμάνσεων-συνδιακυμάνσεων δεν λαμβάνει υπ' όψη τους ετήσιους περιορισμούς για τα ελλiptή τριμηνιαία στοιχεία. Μπορούμε να μεγεθύνουμε το θ , ως $\theta_t = (\theta', \lambda')$, και η μήτρα πληροφόρησης είναι τώρα:

$$I_{uc} = -E \left[\frac{\partial^2 \log L^*}{\partial \theta_t \partial \theta_t'} \right]_{\hat{\theta}_t} \quad (2.45)$$

Οι υπό περιορισμό διακυμάνσεις λαμβάνονται αντιστρέφοντας τη (2.44) χωρίς την θ γραμμή και στήλη (πρόκειται για τη γραμμή και στήλη που αντιστοιχεί στο λ). Αυτές οι υπό περιορισμό διακυμάνσεις είναι υποχρεωτικά μικρότερες¹⁶ από τις χωρίς περιορισμό εκτιμήσεις των διακυμάνσεων.

Επειδή η I_{cu} είναι θετικά ορισμένη, η αντίστροφος της υπομήτρας θα είναι μικρότερη απ' ό,τι η υπομήτρα της I_{uc}^{-1} .

Για λόγους καθαρά χώρου δεν θα αναπτύξουμε την ανάλυση για τον υπολογισμό μιας σχέσης για τον υπολογισμό της μήτρας διακυμάνσεων-συνδιακυμάνσεων, η οποία είναι διαστάσεων $(4+T_1+(T_1/4))$. Περισσότερα δίδονται στη μελέτη του C.L. Gilbert¹⁷.

2.2. Το Ανεξάρτητο Στοχαστικό Γραμμικό Υπόδειγμα (Independent Stochastic Linear Regression Model) και το Μερικώς Ανεξάρτητο Στοχαστικό Γραμμικό Υπόδειγμα (Autoregressive Linear Stochastic Model)

Το υπόδειγμα αυτό μπορεί να θεωρηθεί ως μία υποπερίπτωση του ARARX(ρ) υποδείγματος, όταν $R=I$. Χρησιμοποιώντας συμβολισμό διανυσμάτων και όταν $m=1$, μπορούμε να γράψουμε τη (2.1) ως:

¹⁵ Harvey A.C., 1981, *The Econometric Analysis of Time Series*, σελ. 271.

¹⁶ Smith P., 1974, σελ. 250.

¹⁷ Gilbert C.L., 1975, *Estimation of Regression Equations Using Mixed Annual and Quarterly Data*, Research Paper, University of Bristol, σελ. 40-44.

$$y_t = a y_{t-1} + b' X_t + u_t \quad (2.46)$$

$$u_t \sim \text{NID}(0, \sigma_u^2) \quad (2.47)$$

Για τις ίδιες υποθέσεις, όσον αφορά τις ελλειπείς (τριμηνιαίες) παρατηρήσεις, όπως στο ARARX(p) υπόδειγμα, μπορούμε να λάβουμε την υπό περιορισμό συνάρτηση πιθανότητας ως υποπερίπτωση της εξίσωσης (2.15), αν θέσουμε $\rho = 0$

$$\begin{bmatrix} 1+a^2 & & & & & & & & & & \\ & -a & & & & & & & & & \\ & & -a & & & & & & & & \\ & & & -a & & & & & & & \\ & & & & -a & & & & & & \\ & & & & & -a & & & & & \\ & & & & & & -a & & & & \\ & & & & & & & -a & & & \\ & & & & & & & & -a & & \\ & & & & & & & & & -a & \\ & & & & & & & & & & 1+a^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ y_{T_\perp} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} b' X_1 - ab' X_2 + a y_0 \\ b' X_2 - ab' X_3 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ b' X_{T_\perp-1} - ab' X_{T_\perp} \\ b' X_{T_\perp} - ab' X_{T_\perp+1} + a y_{T_\perp+1} \end{bmatrix} - C' \lambda = 0 \quad (2.48)$$

καθορίζοντας

$$M = M(a) = \begin{bmatrix} 1+a^2 & & & & & & & & & & \\ & -a & & & & & & & & & \\ & & -a & & & & & & & & \\ & & & -a & & & & & & & \\ & & & & -a & & & & & & \\ & & & & & -a & & & & & \\ & & & & & & -a & & & & \\ & & & & & & & -a & & & \\ & & & & & & & & -a & & \\ & & & & & & & & & -a & \\ & & & & & & & & & & 1+a^2 \end{bmatrix} \quad (2.49)$$

και

$$F = F(b, a y_{T\perp+1}, X_{T\perp}, X_{T\perp+1}) = \begin{bmatrix} b' X_1 - a b' X_2 + a y_0 \\ b' X_2 - a b' X_3 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ b' X_{T\perp-1} - a b' X_{T\perp} \\ b' X_{T\perp} - a b' X_{T\perp+1} + a y_{T\perp+1} \end{bmatrix} \quad (2.50)$$

μπορούμε να γράψουμε τη (2.48) ως:

$$M y_1 - F - C' \lambda = 0$$

Στην παραπάνω σχέση παρατηρείται ότι $\text{Det}(M) = \sum_{r=0}^{T_1+1} a^{2r} \neq 0$ και έτσι

μπορούμε να γράψουμε τη (2.48) ως:

$$y_1 - M^{-1} F - M^{-1} C' \lambda = 0$$

Ακολουθούμε την ίδια διαδικασία εκτίμησης, όπως στο υπόδειγμα ARARX(p), και λαμβάνουμε τη σχέση:

$$\hat{y}_1 = G(\hat{a}) \bar{y}_1 + [I - G(\hat{a})] M^{-1}(\hat{a}) F(\hat{a}, \hat{b}, y_0, X_{T\perp+1}, y_{T\perp+1}) \quad (2.51)$$

όπου:

$$G(a) = M^{-1} C' (C M^{-1} C')^{-1} C \quad (2.52)$$

Γνωρίζοντας τα \hat{a} και \hat{b} , μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τη (2.51) ως βάση μιας Gauss-Seidel επαναληπτικής διαδικασίας για να εκτιμηθεί το \hat{y}_1 . Τα \hat{a} και \hat{b} μπορούν να εκτιμηθούν από άμεση εφαρμογή της Μεθόδου Ελαχίστων Τετραγώνων στο υπόδειγμα (2.46) για την υποπερίοδο T_2 , για την οποία έχουμε διαθέσιμα τριμηνιαία στοιχεία.

Χρησιμοποιώντας τον συμβολισμό του υποδείγματος (2.26) μαζί με τις στοχαστικές υποθέσεις που εκφράζονται από τη (2.47), μπορούμε να γράψουμε το επαναληπτικό αυτό σχήμα κατά τη r -στή επανάληψη ως:

$$\hat{y}_{1r} = G(\hat{a}_{r-1}) \bar{y}_1 + [I - G(\hat{a}_{r-1})] M^{-1} F(\hat{a}_{r-1}, \hat{b}_{r-1}, y_0, X_{T\perp+1}, y_{T\perp+1}) \quad (2.53)$$

$$\begin{bmatrix} \hat{a}_r \\ \hat{b}_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z(\hat{y}_{1r})' & Z(\hat{y}_{1r}) \end{bmatrix}^{-1} Z(\hat{y}_{1r})' y(\hat{y}_{1r})$$

Μετά από μερικούς απλούς αλγεβρικούς χειρισμούς, λαμβάνουμε τη

$$\hat{y}_1 = G(\hat{\rho}) \bar{y}_1 + [I - G(\hat{\rho})] M^{-1}(\hat{\rho}) F(\hat{b}, \hat{\rho}, y_0, y_{T+1}, X_{T+1}) \quad (2.60)$$

όπου:

$$G(\hat{\rho}) = M^{-1} C' (C M^{-1} C')^{-1} C \quad (2.61)$$

Δοθέντων των $\hat{\rho}$ και \hat{b} με βάση τη (2.60) για να υπολογίσουμε τις τιμές των ελλειπών τριμηνιαίων παρατηρήσεων \hat{y}_1 . Αυτό μας οδηγεί σε μία επαναληπτική Gauss-Seidel διαδικασία για να υπολογίσουμε το \hat{y}_1 . Οι αρχικές τιμές του αλγόριθμου μπορούν να προσδιορισθούν με τα ακόλουθα βήματα:

Για την υποπερίοδο T_2 εφαρμόζουμε τη Μέθοδο Ελαχίστων Τετραγώνων στη σχέση (2.54), για να επιτύχουμε μια αρχική εκτίμηση του b και χρησιμοποιώντας τον εκτιμητή \hat{b} , εκτιμούμε την

$$\hat{u}_t = y_t - \hat{b}' X_t \quad t = T_1 + 1, \dots, T$$

Μια πρώτη εκτίμηση του ρ μπορεί να επιτευχθεί χρησιμοποιώντας τον εκτιμητή:

$$\hat{\rho} = \frac{\sum_{t=T_1+2}^T \hat{u}_t \hat{u}_{t-1}}{\sum_{t=T_1+2}^T \hat{u}_{t-1}^2} \quad (2.62)$$

Για μια πιο πλήρη παρουσίαση των τεχνικών που συνήθως χρησιμοποιούνται για την εκτίμηση των αρχικών τιμών των b και ρ , γράφουμε το υπόδειγμα που ορίζεται από τις σχέσεις (2.54) – (2.56) με την ακόλουθη μορφή:

$$y = Xb + u \quad (2.63)$$

$$Ru = e \quad (2.64)$$

$$e_t \sim \text{NID}(0, \sigma_e^2 I_T)$$

και

$$f(p) = p^3 + ap^2 + bp + c = 0 \quad (2.68)$$

όπου:

$$a = - (T-2) \sum_2^T h_t h_{t-1} / \left[(T-1) \left(\sum_2^T h_{t-1}^2 - h_t^2 \right) \right]$$

$$b = \left[(T-1)h_t^2 - T \sum_2^T h_{t-1}^2 - \sum_2^T h_t^2 \right] / (T-1) \left(\sum_2^T h_{t-1}^2 - h_t^2 \right)$$

$$c = T \sum_2^T h_t h_{t-1} / \left[(T-1) \left(\sum_2^T h_{t-1}^2 - h_t^2 \right) \right]$$

και $h_t = y_t - X_t \hat{b}$, δοθέντος του \hat{b} .

Η κυβική $f(p)$ ανήκει στην «irreducible case» των κυβικών εξισώσεων και μία ρίζα της είναι:

$$\bar{p} = -2 \sqrt[3]{\frac{\omega}{3 \cos\left(\frac{\varepsilon}{3} + \frac{\pi}{3}\right)}} - \frac{a}{3} \quad (2.69)$$

όπου:

$$\varepsilon = \cos^{-1} \left[\left(q\sqrt{27} \right) / \left(2\omega\sqrt{-p} \right) \right] \quad (2.70)$$

$$\omega = \frac{b-a^2}{3}, \quad q = c - ab/3 + 2a^3/27 \quad (2.71)$$

Οι εξισώσεις (2.67) και (2.69) αποτελούν τις δύο βασικές συνιστώσες μιας Cochrane-Orcutt επαναληπτικής διαδικασίας. Αυτή η διαδικασία είναι πολύ γρηγορότερη, σύμφωνα με την εργασία των Beach και Mackinnon.

Η επαναληπτική διαδικασία Gauss-Seidel, προκειμένου να πετύχουμε ταυτόχρονες εκτιμήσεις τόσο των ελλিপών τριμηνιαίων παρατηρήσεων όσο και των άλλων παραμέτρων του υπό εκτίμηση υποδείγματος, δίδεται στα βήματα του αλγόριθμου που ακολουθεί:

Βήμα 1. Εφαρμόζουμε τη Μέθοδο Ελαχίστων Τετραγώνων στο υπόδειγμα (2.54) για την υποπερίοδο T_2 , όπου τριμηνιαία στοιχεία είναι εξ υποθέσεως διαθέσιμα, για να επιτύχουμε υπολογισμό αρχικών τιμών του \hat{b} και στη συνέχεια υπολογισμό του \hat{p} βάσει της σχέσης (2.62).

Βήμα 2. Λαμβάνουμε αρχικές εκτιμήσεις τιμές των ελλিপών τριμηνιαίων παρατηρήσεων y_1 χρησιμοποιώντας τη σχέση (2.60).

Βήμα 3. Αντικαθιστούμε αυτές τις αρχικές εκτιμήσεις στο υπόδειγμα που ορίζουν οι σχέσεις (2.63), (2.64) και ξεκινούμε μια νέα επαναληπτική διαδικασία μεταξύ των εξισώσεων (2.67) και (2.69) μέχρι να επιτευχθεί σύγκλιση. Οι εκτιμήσεις που λαμβάνονται κατά την τελευταία επανάληψη αυτής της υποδιαδικασίας χρησιμοποιούνται ως νέες αρχικές τιμές στο Βήμα 2.

Ο αλγόριθμος, που περιγράφηκε παραπάνω, συνεχίζεται μέχρι την επίτευξη σύγκλισης.

Όπως στο υπόδειγμα ARARX(1), η επαναληπτική διαδικασία του τύπου Gauss-Seidel που προτάθηκε έχει μεγάλο υπολογιστικό κόστος. Ειδικά στο Βήμα 3, αν η τιμή της likelihood αυξάνει σε κάθε βήμα, ο αλγόριθμος πρέπει να πλησιάζει σε ένα σχετικό (τοπικό) μέγιστο, αν και στην περίπτωση μιας επαναληπτικής διαδικασίας τύπου Cochrane-Orcutt¹⁹ κανείς δεν μπορεί να είναι σίγουρος ότι αυτό είναι απόλυτο μέγιστο.

Τους υπολογισμούς μας μπορούμε να τους απλοποιήσουμε, χρησιμοποιώντας άλλες γνωστές επαναληπτικές διαδικασίες με δύο στάδια, στη θέση της υποδιαδικασίας 3. Τέτοιες διαδικασίες είναι των Durbin²⁰, Klein²¹ και Phillips²². Η πιο ελκυστική και εύκολη όμως είναι αυτή του Sargan²³, η οποία χρησιμοποιήθηκε από τον Hendry²⁴, και ακόμα εκτενέστερα από τον Gilbert²⁵ στην ταυτόχρονη χρησιμοποίηση ετήσιων και τριμηνιαίων στοιχείων. Τα τυπικά σφάλματα των παραμέτρων και οι ελλείψεις τριμηνιαίες παρατηρήσεις μπορούν να προσδιοριστούν όπως στο υπόδειγμα ARARX(1).

2.4. Το Κλασικό Κανονικό Γραμμικό Υπόδειγμα²⁶

Αν στο υπόδειγμα ARARX(p) υποθέσουμε ότι $a=0$ και $R=I$, τότε καταλήγουμε στο Κλασικό Κανονικό Γραμμικό Υπόδειγμα.

$$y = Xb + u \quad (2.72)$$

$$E(u) = 0 \quad (2.73)$$

¹⁹ Harvey A.C., 1981, *The Econometric Analysis of Time Series*, σελ. 192-197.

²⁰ Γκαμαλέτσος Θ., 1973, *Οικονομετρία*, σελ. 213-214.

²¹ Γκαμαλέτσος Θ., 1973, *Οικονομετρία*, σελ. 211-212.

²² Phillips A.W., *Estimation of Stochastic Difference Equations with Moving Average Disturbances*, Paper Presented to the Econometric Society, San Francisco, 1966.

²³ Sargan J.D., 1961, «The Maximum Likelihood Estimation of Economic Relationships with Autoregressive Residuals», *Econometrica*, 29, σελ. 414-426.

²⁴ Hendry D.F., 1971, «Maximum Likelihood Estimation of Systems of Simultaneous regression equations with errors generated by a vector autoregressive process», *International Economic Review*, 12, σελ. 257-272.

²⁵ Βλέπε Gilbert C.L., 1977, «Regression Using Mixed Annual and Quarterly Data», *Journal of Econometrics*, σελ. 221-239.

²⁶ Γκαμαλέτσος Θ., 1973, *Οικονομετρία*, σελ. 161-173.

$$d(u) = \sigma_u^2 I_T \quad (2.74)$$

$$u \sim \text{NID}(0, \sigma_u^2 I_T) \quad (2.75)$$

Διατηρώντας και χρησιμοποιώντας τις ίδιες υποθέσεις για τις ελλειπείς (τριμηνιαίες) παρατηρήσεις, όπως στο υπόδειγμα ARARX(p), γράφουμε την υπό περιορισμούς log-likelihood εξίσωση του (2.72) – (2.75) ως μια ειδική περίπτωση της εξίσωσης (1.4). Απλά θέτουμε $a=0$ και $p=0$.

$$\begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & 1 & & & \\ & & \circ & & \\ & & & \circ & \\ & & & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_{T-1} \\ y_{T-1} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} X_1 b \\ X_2 b \\ \vdots \\ X_{T-1} b \end{bmatrix} - C' \lambda = 0 \quad (2.76)$$

ορίζοντας $F = X_1 b$ (2.77), η υπό περιορισμούς log-likelihood εξίσωση μπορεί να γραφεί ως:

$$y_1 - F - C' \lambda = 0 \quad (2.78)$$

Η τελευταία σχέση, μετά από εξάλειψη του λ , μπορεί να γραφεί ως:

$$y_1 = F + C' (C C')^{-1} C y_1 - C' (C C')^{-1} C F \quad (2.79)$$

Χρησιμοποιώντας τη σχέση $\bar{y}_1 = C' (C C')^{-1} C y_1$, η εξίσωση (2.79) μπορεί να γραφεί ως:

$$\hat{y}_1 = F + \bar{y}_1 - C' (C C')^{-1} C F \quad (2.80)$$

και χρησιμοποιώντας τη $F = X_1 b$, η (2.77) μπορεί να γραφεί:

$$\hat{y}_1 = \bar{y}_1 + X_1 \hat{b} - \bar{X}_1 \hat{b} \quad \text{ή}$$

$$\hat{y}_1 = \bar{y}_1 + (X_1 - \bar{X}_1) \hat{b} \quad (2.81)$$

Έτσι, χρησιμοποιώντας το διάνυσμα με τους εκτιμημένους συντελεστές \hat{b} , μπορούμε να εκτιμήσουμε τις ελλειπείς (τριμηνιαίες) παρατηρήσεις, προσθέτοντας στις μέσες τριμηνιαίες παρατηρήσεις τις σταθμισμένες αποκλίσεις

των ερμηνευτικών μεταβλητών από τους τριμηνιαίους μέσους τους. Αυτό το αποτέλεσμα είναι ισοδύναμο με εκείνο των Chow και Lin²⁷.

Μπορούμε να επεκτείνουμε την ανάλυση των ελλিপών τριμηνιαίων παρατηρήσεων στην περίπτωση του Κλασικού Κανονικού Γραμμικού Υποδείγματος ακολουθώντας τρεις εναλλακτικές διαδικασίες. Οι δύο πρώτες σχετίζονται με την εκτίμηση του Κλασικού Κανονικού Γραμμικού Υποδείγματος μέσω δύο διαφορετικών προσεγγίσεων των ελλিপών τριμηνιαίων στοιχείων. Η τρίτη διαδικασία είναι η μικτή Theil–Goldberger²⁸ τεχνική εκτίμησης.

Η πρώτη εναλλακτική πρόταση είναι να θέσουμε τις ετήσιες παρατηρήσεις των πρώτων $T_1/4$ ετών με τις τριμηνιαίες παρατηρήσεις των επόμενων T_2 τριμήνων, καταλήγοντας στο υπόδειγμα:

$$\begin{bmatrix} y_1^a \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_1^a \\ X_2 \end{bmatrix} b + \begin{bmatrix} u_1^a \\ u_2 \end{bmatrix} \quad (2.82)$$

με τις ακόλουθες στοχαστικές ιδιότητες:

$$E \begin{bmatrix} u_1^a \\ u_2 \end{bmatrix} = 0$$

και

$$D \begin{bmatrix} u_1^a \\ u_2 \end{bmatrix} = \sigma^2 \begin{bmatrix} 4I_{T_1/4} & 0 \\ 0 & I_{T_1} \end{bmatrix} = \sigma^2 Q_1 \quad (2.83)$$

$$\text{όπου: } E \begin{pmatrix} u_1^a & u_1^a \end{pmatrix} = C E \begin{pmatrix} u_1 & u_1 \end{pmatrix} C = 4 \sigma^2 I_{T_1/4}$$

Τα κατάλοιπα του μοντέλου (2.82) παρουσιάζουν ετεροσκεδαστικότητα απ' τη στιγμή που τα μη διαγώνια στοιχεία είναι μηδέν και τα μη διαγώνια είναι διαφορετικά μεταξύ τους.

Η δεύτερη εναλλακτική περίπτωση είναι να θέσουμε τους τριμηνιαίους μέσους \bar{y}_1 , \bar{X}_1 και \bar{u}_1 με τις τριμηνιαίες παρατηρήσεις των επόμενων T_2 τριμήνων. Έτσι, καταλήγουμε στο υπόδειγμα:

²⁷ Chow G.C. και Lin A., 1971, «Best Linear Unbiased Interpolation Distribution and Extrapolation of Time Series by Related Time Series», *Review of Economics and Statistics*, σελ. 372-375.

²⁸ Theil H. και A.S. Goldberger, 1961, «On Pure and Mixed Statistical Estimation in Economics», *International Economic Review*, σελ. 65-78.

$$\begin{bmatrix} \bar{y}_1 \\ \bar{y}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{X}_1 \\ \bar{X}_2 \end{bmatrix} b + \begin{bmatrix} \bar{u}_1 \\ \bar{u}_2 \end{bmatrix} \quad (2.84)$$

με τις ακόλουθες στοχαστικές ιδιότητες:

$$E \begin{bmatrix} \bar{u}_1 \\ \bar{u}_2 \end{bmatrix} = 0$$

και

$$D \begin{bmatrix} \bar{u}_1 \\ \bar{u}_2 \end{bmatrix} = \sigma^2 \begin{bmatrix} 1/4 (I_{T_1/4} \otimes e_4 e_4') & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & I_{T_2} \end{bmatrix} = \sigma^2 Q_2 \quad (2.85)$$

Τα κατάλοιπα του μοντέλου (2.84) παρουσιάζουν αυτοσυσχέτιση από τη στιγμή που τα διαγώνια στοιχεία της μήτρας Q_2 δεν είναι ίσα, και τα μη διαγώνια στοιχεία δεν είναι ίσα, και είναι διάφορα του μηδενός.

Η τρίτη εναλλακτική προσέγγιση είναι ένας μικτός Theil–Goldberger εκτιμητής. Ακολουθώντας αυτή την προσέγγιση, εκτιμούμε την ακόλουθη τριμηνιαία εξίσωση:

$$y_2 = X_2 b + u_2 \quad (2.86)$$

Λαμβάνοντας υπ' όψη την εξωγενή πληροφόρηση των παρεχομένων $T_{1/4}$ (αρχικών) παρατηρήσεων, το υπόδειγμα με τις $T_{1/4}$ επήσεις παρατηρήσεις είναι:

$$y_1^a = X_1^a b + u_1^a \quad (2.87)$$

με

$$E(u_1^a) = 0$$

$$D(u_1^a) = 4 \sigma^2 I_{T_{1/4}}$$

$$E(X_1^{a'} u_1^a) = 0$$

Οι εκτιμήσεις ελαχίστων τετραγώνων του (2.87) είναι:

$$\tilde{b} = (X_1^{a'} X_1^a)^{-1} = X_1^{a'} y_1^a \quad (2.88)$$

$$D(\tilde{b}) = 4 \sigma^2 (X_1^{a'} X_1^a)^{-1}$$

Γράφουμε την εξωγενή πληροφόρηση με τη μορφή:

$$\tilde{b} = I_k b + v$$

και όλο το υπόδειγμα ως:

$$\begin{bmatrix} \frac{y_2}{\sigma} \\ \tilde{b} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_2 \\ I_k \end{bmatrix} b + \begin{bmatrix} u_2 \\ v \end{bmatrix} \quad (2.89)$$

με

$$E = \begin{bmatrix} u_2 \\ v \end{bmatrix} = 0 \quad (2.90)$$

και

$$D \begin{bmatrix} u_2 \\ v \end{bmatrix} = \sigma^2 \begin{bmatrix} \sigma^2 I_{T_2} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & D(\tilde{b}) \end{bmatrix}$$

και ο εκτιμητής Aitken (Generalized Least Squares) του (2.89) είναι:

$$\begin{aligned} \check{b} &= (X_2' I_k) \begin{bmatrix} \sigma^2 I_{T_2} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & D(\tilde{b}) \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} X_2 \\ I_k \end{bmatrix}^{-1} (X_2' I_k) \begin{bmatrix} \sigma^2 I_{T_2} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & D(\tilde{b}) \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} y_2 \\ \tilde{b} \end{bmatrix} \\ &\quad \text{ή} \\ \check{b} &= \left[1/\sigma^2 X_2' X_2 + D(\tilde{b})^{-1} \right]^{-1} \left[1/\sigma^2 X_2' y_2 + D(\tilde{b})^{-1} \tilde{b} \right] = \\ &= (1/4 X_1^a' X_1^a + X_2' X_2) (1/4 X_1^a' y_1^a + X_2' y_2) \end{aligned} \quad (2.91)$$

$$\text{με } D(\check{b}) = \sigma^2 [1/4 X_1^a' X_1^a + X_2' X_2]^{-1} \quad (2.92)$$

Τώρα είμαστε σε θέση να αποδείξουμε ένα βασικό θεώρημα:

Θεώρημα. Η Μέθοδος της Μεγίστης Πιθανοφάνειας (ML), η Μέθοδος των Ελαχίστων Τετραγώνων (OLS) και η Μέθοδος των Γενικευμένων Ελαχίστων Τετραγώνων (GLS) για την εκτίμηση των υποδειγμάτων που ορίζουν οι σχέσεις (2.84) και (2.82) καθώς και ο μικτός εκτιμητής των Theil–Goldberger είναι ισοδύναμοι.

Πρώτα αποδεικνύουμε ότι οι OLS εκτιμήσεις του (2.84) και οι αντίστοιχες GLS του (2.82) είναι ισοδύναμες, αν τα κατάλοιπα \tilde{u}_i και \tilde{u}_i^a είναι ανεξάρτητα.

Η εκτίμηση (GLS) της (2.82) είναι:

$$\begin{aligned} \hat{b} &= \begin{bmatrix} X_1^a \\ X_2 \end{bmatrix}' \begin{bmatrix} 1/4 I_{T_1/4} & 0 \\ 0 & I_{T_2} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} X_1^a \\ X_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1^a \\ X_2 \end{bmatrix}' \begin{bmatrix} 1/4 I_{T_1/4} & 0 \\ 0 & I_{T_2} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} y_1^a \\ y_2 \end{bmatrix} = \\ &= (1/4 X_1^a' X_1^a + X_2' X_2)^{-1} (1/4 X_1^a' y_1^a + X_2' y_2) \end{aligned} \quad (2.93)$$

Μετά από σειρά αλγεβρικών μετασχηματισμών, ο εκτιμητής (2.93) λαμβάνει την ακόλουθη μορφή:

$$\hat{b} = (\bar{X}_1' \bar{X}_1 + X_2' X_2)^{-1} (\bar{X}_1' \bar{y}_1 + X_2' y_2) \quad (2.94)$$

ο οποίος είναι ο εκτιμητής ελαχίστων τετραγώνων της σχέσης (2.84).

Η απόδειξη ότι η (2.93) και (2.94) είναι ισοδύναμες με τη σχέση (2.91) είναι εύκολη. Συνεπώς ο μικτός Theil–Goldberger εκτιμητής είναι ισοδύναμος με τις σχέσεις (2.93) και (2.94).

Το τρίτο μέρος αυτού του θεωρήματος είναι ότι η ML (Maximum Likelihood) μέθοδος είναι ισοδύναμη με τις τρεις παραπάνω προσεγγίσεις. Η πρόταση αυτή μπορεί να αποδειχθεί ως εξής, γράφοντας:

$$\hat{y}_1 - X_1 b = \bar{y}_1 - \bar{X}_1 b \quad (2.95)$$

και αντικαθιστώντας αυτή τη σχέση στο άθροισμα των τετραγωνικών σφαλμάτων του (2.72)

$$\phi = (y_1 - X_1 b)' (y_1 - X_1 b) + (y_2 - X_2 b)' (y_2 - X_2 b)$$

λαμβάνοντας την ακόλουθη σχέση:

$$\phi = (\bar{y}_1 - \bar{X}_1 b)' (\bar{y}_1 - \bar{X}_1 b) + (y_2 - X_2 b)' (y_2 - X_2 b)$$

η οποία είναι η συνάρτηση του αθροίσματος των τετραγώνων των καταλοίπων του υποδείγματος (2.84).

Οι επιπτώσεις αυτού του θεωρήματος είναι προφανείς από πλευράς υπολογισμών.

Προκειμένου να εκτιμήσουμε το Κλασικό Γραμμικό Υπόδειγμα, κάτω από τις υποθέσεις των ελλিপών τριμηνιαίων στοιχείων, μπορούμε να διαλέξουμε ανάμεσα σε τρεις διαφορετικούς τρόπους διαδικασιών εκτίμησης.

Πρώτον, μπορούμε να εκτιμήσουμε τις ελλειείς τριμηνιαίες παρατηρήσεις από τη σχέση (2.81). Χρειαζόμαστε μόνο μία εκτίμηση του b , την οποία προφανώς λαμβάνουμε με τη Μέθοδο Ελαχίστων Τετραγώνων για την υποπερίοδο T_2 , όπου υπάρχουν διαθέσιμα τριμηνιαία στοιχεία.

Δεύτερον, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τον μικτό Theil–Goldberger εκτιμητή, εκλογή η οποία εξαρτάται συνήθως από τις υπολογιστικές μας δυνατότητες.

Τρίτον, μπορούμε να εκτιμήσουμε τη (2.84) άμεσα, χρησιμοποιώντας κλασικά στατιστικά πακέτα για παλινδρόμηση. Αυτή που χρειάζεται είναι η αντικατάσταση τόσο των ελλিপών τριμηνιαίων παρατηρήσεων της εξηρητημένης μεταβλητής όσο και των αντίστοιχων τιμών των εξωγενών μεταβλητών, από τις μέσες τριμηνιαίες, διορθώνοντας ως προς τους αντίστοιχους βαθμούς ελευθερίας.

3. ΜΕΡΙΚΑ MONTE-CARLO ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

Στο μέρος αυτό παρουσιάζουμε μία σειρά από Monte-Carlo αποτελέσματα από την εφαρμογή δύο εναλλακτικών μεθόδων εκτίμησης ενός τριμηνιαίας βάσης υποδείγματος με ελλiptείς τριμηνιαίες παρατηρήσεις στην εξηρητημένη μεταβλητή για μέρος του δείγματος εκτίμησης. Η πρώτη μέθοδος βασίζεται στην εκτίμηση του τριμηνιαίας βάσης υποδείγματος χρησιμοποιώντας όλες τις τριμηνιαίες διαθέσιμες παρατηρήσεις. Η δεύτερη μέθοδος βασίζεται στους εκτιμητές που αναπτύχθηκαν στο αμέσως προηγούμενο μέρος. Τα αποτελέσματα αυτά προέκυψαν από την εφαρμογή σειράς Monte-Carlo πειραματισμών με βάση το Κλασικό Κανονικό Γραμμικό Υπόδειγμα.

Ειδικότερα πειραματισθήκαμε²⁹ με βάση την εξειδίκευση:

$$y_t = b_1 + b_2 X_t + u_t \quad (3.1)$$

$$u_t \sim \text{NID}(0, 3.6) \quad (3.2)$$

Η μεταβλητή X_t δημιουργήθηκε με βάση τις υποθέσεις³⁰:

$$X_t = \exp(0.04t) + w_t \quad (3.3)$$

$$w_t \sim \text{NID}(0, 4.2) \quad (3.4)$$

και
$$X_t = \tau X_{t-1} + \sqrt{(1-\tau^2)} \xi_t \quad (3.5)$$

με
$$X_1 = \xi_1 \quad (3.6)$$

$$\xi_t \sim \text{NID}(0, 1) \quad (3.7)$$

Οι πραγματικές τιμές των συντελεστών b_1 και b_2 υποθέσαμε ότι είναι:

$$b_1 = b_2 = 1 \quad (3.8)$$

Οι πειραματισμοί βασίστηκαν σε δείγματα μεγέθους $T=40, 80$ και 120 , για σειρά από διαφορετικές (αναλογικά) υποθέσεις, όσον αφορά τις «ελλiptείς» (τριμηνιαίες) για $t=1, 2, \dots, T_1$ παρατηρήσεις. Κάθε πείραμα περιελάμβανε $N=1.000$ επαναλήψεις.

Σε κάθε επανάληψη λαμβάνουμε:

²⁹ Δημιουργήσαμε Pseudo-Normal τυχαίες μεταβλητές χρησιμοποιώντας μία Box-Müller διαδικασία.

³⁰ Οι υποθέσεις (3.3) – (3.4) εισάγουν μία έντονη μακροχρόνια τάση στη διαμόρφωση των τιμών της μεταβλητής X_t , ενώ οι υποθέσεις (3.5) – (3.7) προσδίδουν στη μεταβλητή X_t μία στάσιμη (stationary) συμπεριφορά.

α) Εκτιμήσεις ελαχίστων τετραγώνων των παραμέτρων b_1 και b_2 με βάση την τριμηνιαία βάση εξειδίκευσης (3.1), χρησιμοποιώντας τις $t=T_1+1, \dots, T$ διαθέσιμες τριμηνιαίες παρατηρήσεις (Μέθοδος Α).

β) Εκτιμήσεις των παραμέτρων της (3.1) με βάση τις υποθέσεις και τη μέθοδο εκτίμησης της μέγιστης πιθανοφάνειας, όπως αυτή παρουσιάστηκε στο μέρος 2.4 (Μέθοδος Β).

Γράφουμε την (3.1) υπό μορφή μητρών:

$$y = Xb + u \quad (3.9)$$

$$\text{με } X = [X_t] \quad \text{για } t = 1, \dots, T \quad (3.10)$$

$$b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} \quad (3.11)$$

$$u \sim \text{NID}(0, 3.6)$$

και με βάση τις διάφορες υποθέσεις για τη διαθεσιμότητα των (τριμηνιαίων) στοιχείων, η (3.9) μπορεί να γραφεί:

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} b + \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \quad (3.12)$$

όπου y_1 είναι ένα $(T_1 \times 1)$ διάνυσμα τριμηνιαίων παρατηρήσεων της μεταβλητής y κ.ο.κ.

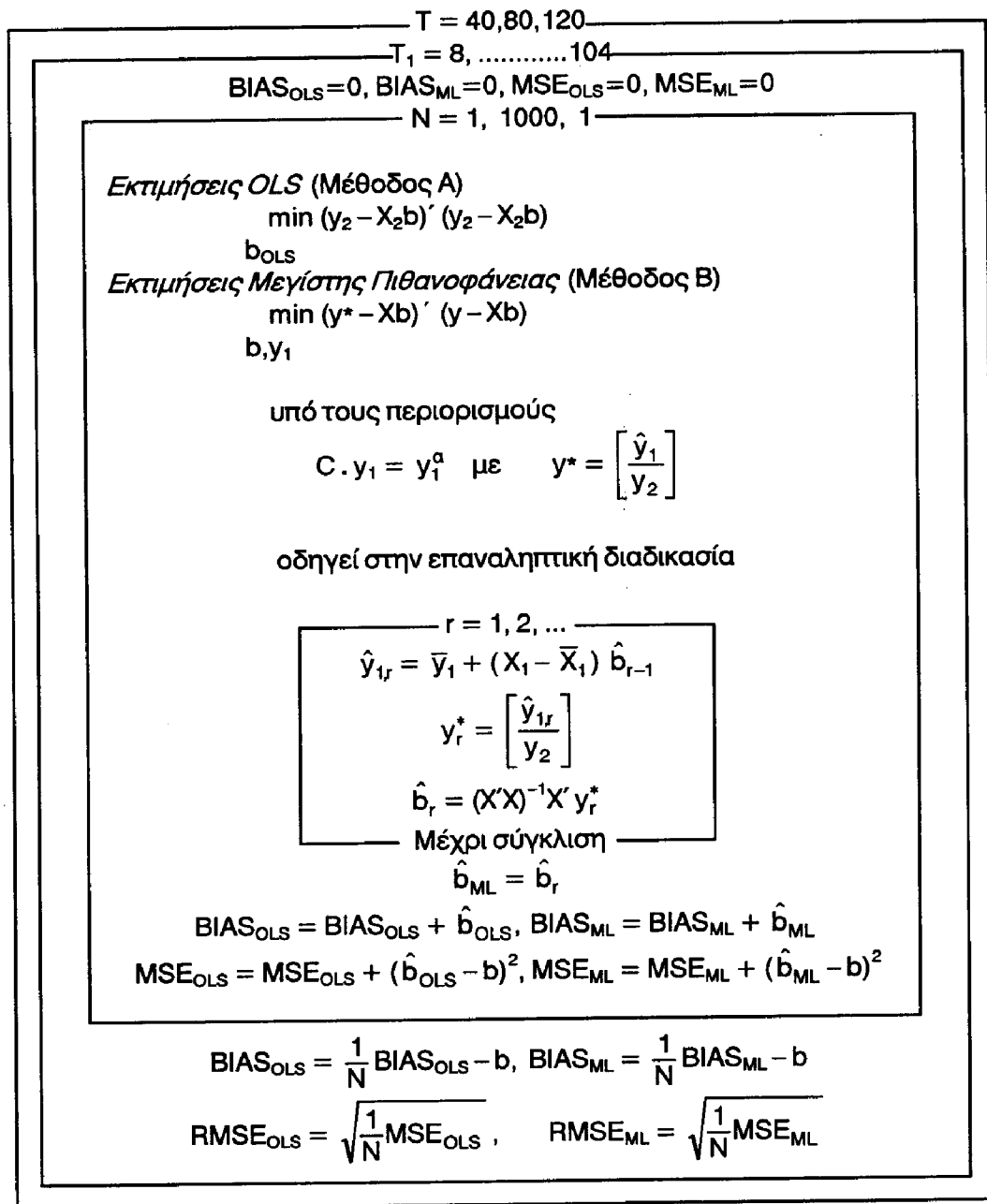
Η (3.12), με βάση τις υποθέσεις για τα διαθέσιμα τριμηνιαία στοιχεία, μπορεί να γραφεί ως εξής:

$$y^* = Xb + u \quad (3.13)$$

$$y^* = \begin{bmatrix} \hat{y}_1 \\ y_2 \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{(ελλιπείς παρατηρήσεις)} \\ \text{(διαθέσιμες τριμηνιαίες παρατηρήσεις)} \end{array}$$

Μια αναλυτική παρουσίαση της λειτουργίας των Monte-Carlo πειραματισμών αυτής της μελέτης, σε σχέση με το πρόγραμμα που δημιουργήθηκε ειδικά γι' αυτή τη συγκεκριμένη εφαρμογή, δίδονται στον Αλγόριθμο Ι.

ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΣ Ι



Στους πίνακες Π1 και Π2 του Παραρτήματος παρουσιάζουμε τη μεροληψία³¹ (Bias) και τη ρίζα του μέσου τετραγωνικού σφάλματος RMSE (Root Mean

³¹ Μεροληψία = E(\hat{b}) - b.

Square Error)³² για $N=1.000$, για $T_1 = 8, \dots, 32$ (64) (104) και για $T = 40, 80$ και 120 . Στον πίνακα Π1 παρουσιάζονται τα αποτελέσματα των Monte-Carlo πειραματισμών με βάση τις υποθέσεις (3.1)–(3.4). Στον πίνακα Π2 παρουσιάζονται τα αντίστοιχα αποτελέσματα των πειραματισμών με βάση τις υποθέσεις (3.5)–(3.7), όπου έχουμε την ανεξάρτητη μεταβλητή να ακολουθεί τιμές στάσιμης διαδικασίας. Το δεύτερο στοιχείο κάθε κελιού των πινάκων Π1 και Π2 αναφέρεται στα αποτελέσματα των πειραματισμών με βάση τη μέθοδο της μεγίστης πιθανοφάνειας, ενώ το πρώτο αντιστοιχεί στις αντίστοιχες εκτιμήσεις ελαχίστων τετραγώνων για $t=T_1+1, \dots, T$ (χρησιμοποιώντας μόνο τα διαθέσιμα τριμηνιαία στοιχεία).

Για να γίνει καλύτερη η παρουσίαση των αποτελεσμάτων των πινάκων Π1 και Π2, χρησιμοποιήσαμε τους λόγους των Ριζών των Μέσων Τετραγωνικών Σφαλμάτων.

$$\frac{RMSE_A}{RMSE_B}$$

τον οποίο παρουσιάζουμε στους πίνακες 1, 2 και 3 (η παρουσίαση είναι ακριβώς ανάλογη αυτής των πινάκων Π1 και Π2). Με βάση τα αποτελέσματα των πινάκων 1, 2 και 3, όσο και μια σειρά από ανάλογες γραφικές παρουσιάσεις αυτών των αποτελεσμάτων στα σχεδιαγράμματα 1, 2 και 3, προκύπτουν μία σειρά από ενδιαφέροντα αποτελέσματα, μερικά εκ των οποίων είναι:

- Η μέθοδος Β δίνει πάντοτε πιο αποτελεσματικές εκτιμήσεις των συντελεστών b_1 και b_2 , συγκρινόμενη με την εναλλακτική μέθοδο (Μέθοδο Α). Στους πίνακες 1, 2 και 3 οι τιμές των λόγων των RMSE είναι σχεδόν πάντοτε μεγαλύτερες της μονάδας.
- Οι εκτιμήσεις της διακύμανσης του διαταρακτικού όρου είναι αποτελεσματικότερες, εκτός της περίπτωσης που έχουμε στάσιμες χρονοσειρές, οι οποίες έχουν μικρό συντελεστή αυτοσυσχέτισης ($\tau=.25$). Στην περίπτωση στάσιμων χρονοσειρών με υψηλή αυτοσυσχέτιση ($\tau=.75$), η υπεροχή της μεθόδου Β έναντι της μεθόδου Α είναι εμφανέστατη.
- Όσο το μέγεθος του δείγματος εκτίμησης αυξάνει, ενώ ο αριθμός των ελλειπών παρατηρήσεων παραμένει σταθερός, η αποτελεσματικότητα και των δύο μεθόδων τείνει να ταυτισθεί, μια και:

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{RMSE_A}{RMSE_B} \rightarrow -1$$

³² Μέσο Τετραγωνικό Σφάλμα $MSE = E(\hat{b} - b)^2$ και η Ρίζα του Μέσου Τετραγωνικού Σφαλματος = \sqrt{MSE} .

Ενδεικτικά παρουσιάζουμε μερικές εκτιμήσεις των λόγων των RMSE του b_1 για $N=32$ (N =αριθμός των ελλειπών παρατηρήσεων).

$T=40$	$T=80$	$T=120$
131.15	3.29	2.15
7.58	2.02	1.62
7.95	2.72	1.11

Ανάλογα με τις διάφορες υποθέσεις, κυρίως για τις ερμηνευτικές μεταβλητές, η υπεροχή της μεθόδου Β κατά συντελεστή μπορεί σε γενικές γραμμές να παρουσιασθεί ως εξής:

Όταν οι ερμηνευτικές μεταβλητές έχουν μακροχρόνια τάση ή είναι στάσιμες με υψηλό συντελεστή αυτοσυσχέτισης ($\tau=.75$), τότε τα κέρδη από τη χρησιμοποίηση της μεθόδου Β είναι μεγαλύτερα για την παράμετρο b_2 .

Όταν οι ερμηνευτικές μεταβλητές είναι στάσιμες ($\tau=.25$), τότε το κέρδος της αποτελεσματικότητας από τη χρησιμοποίηση της μεθόδου Β πηγαίνει στην παράμετρο b_1 .

ΠΙΝΑΚΑΣ 1
 Συνοπτικά αποτελέσματα των Monte-Carlo πειραματισμών
 με βάση τις υποθέσεις (3.1) - (3.4)

<i>N</i>	<i>M</i>	Λόγος των <i>RMSE</i> <i>b</i> ₁	Λόγος των <i>RMSE</i> <i>b</i> ₂	Λόγος των <i>RMSE</i> <i>σ</i> ²
40	8	2.0194	1.7575	2.3656
40	16	4.7710	3.1846	8.0080
40	24	10.368	5.7834	33.583
40	32	131.15	58.058	142.78
80	8	1.3600	1.3461	1.5300
80	24	2.0757	1.7806	4.7453
80	32	3.2996	2.2578	8.7149
80	40	4.4626	2.7508	19.357
80	48	9.1339	4.5785	58.918
80	56	22.258	8.5886	83.362
80	64	86.089	20.554	84.864
120	8	1.1731	1.1768	1.3217
120	16	1.2377	1.1624	1.8221
120	24	1.4914	1.3846	2.5268
120	32	2.1581	1.7013	3.7296
120	40	1.9813	1.4002	6.2092
120	48	2.4703	1.4585	9.3022
120	56	3.1765	1.6598	19.208
120	64	4.4447	2.5763	36.330
120	72	7.9078	3.5895	57.592
120	80	13.415	4.5582	95.942
120	88	23.117	6.3024	87.390
120	96	70.677	15.997	70.732
120	104	214.16	36.706	55.555

N=Συνολικός αριθμός διαθέσιμων παρατηρήσεων.

M=Αριθμός των ελλειπών παρατηρήσεων.

Πηγή: Επεξεργασία δεδομένων του πίνακα Π1.

ΠΙΝΑΚΑΣ 2
 Συνοπτικά αποτελέσματα των Monte-Carlo πειραματισμών
 με βάση τις υποθέσεις (3.5) - (3.7)
 $\tau = .25$

<i>N</i>	<i>M</i>	Λόγος των <i>RMSE</i> b_1	Λόγος των <i>RMSE</i> b_2	Λόγος των <i>RMSE</i> σ^2
40	8	1.2703	1.3097	1.0249
40	16	1.6921	1.3753	.77214
40	24	2.5526	1.6141	.92895
40	32	7.5824	2.9036	2.8642
80	8	1.1922	1.0952	.87725
80	16	1.3334	1.1652	.64490
80	24	1.6302	1.1976	.56265
80	32	2.0225	1.3599	.53216
80	40	2.0725	1.4015	.41918
80	48	2.4949	1.2535	.46713
80	56	3.9542	1.3801	.53652
80	64	6.1951	1.4398	1.0071
120	8	1.0732	.97763	.85746
120	16	1.1189	1.0147	.67633
120	24	1.2959	1.0935	.51271
120	32	1.6101	1.0922	.41728
120	40	1.4936	1.0498	.34795
120	48	1.6286	1.0564	.34223
120	56	2.0381	1.0888	.30946
120	64	2.3971	1.0743	.29313
120	72	2.4657	1.0786	.27273
120	80	3.1793	1.2710	.30250
120	88	4.0348	1.4394	.39287
120	96	6.5232	1.7742	.66345
120	104	12.771	1.9210	1.2065

N = Συνολικός αριθμός διαθέσιμων παρατηρήσεων.

M = Αριθμός των ελλειπών παρατηρήσεων.

Πηγή: Επεξεργασία δεδομένων του πίνακα Π2.

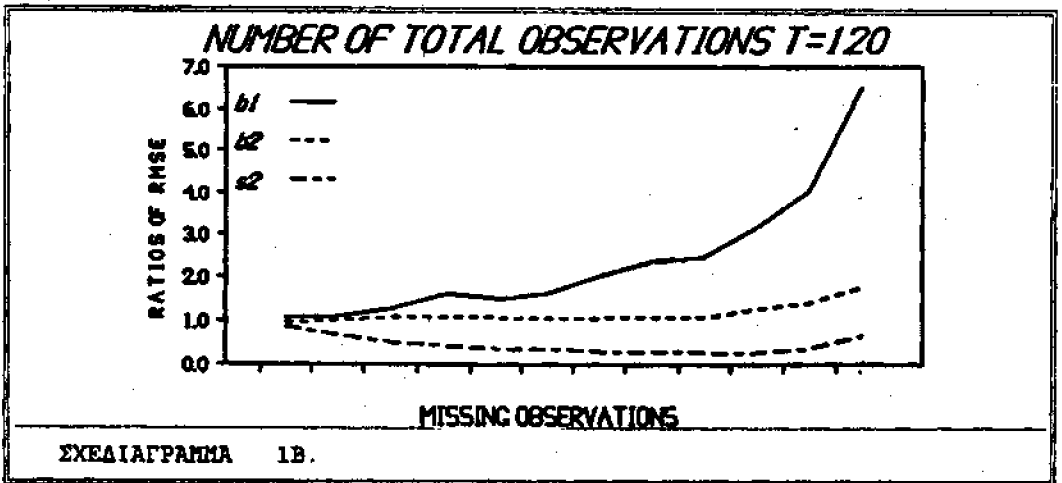
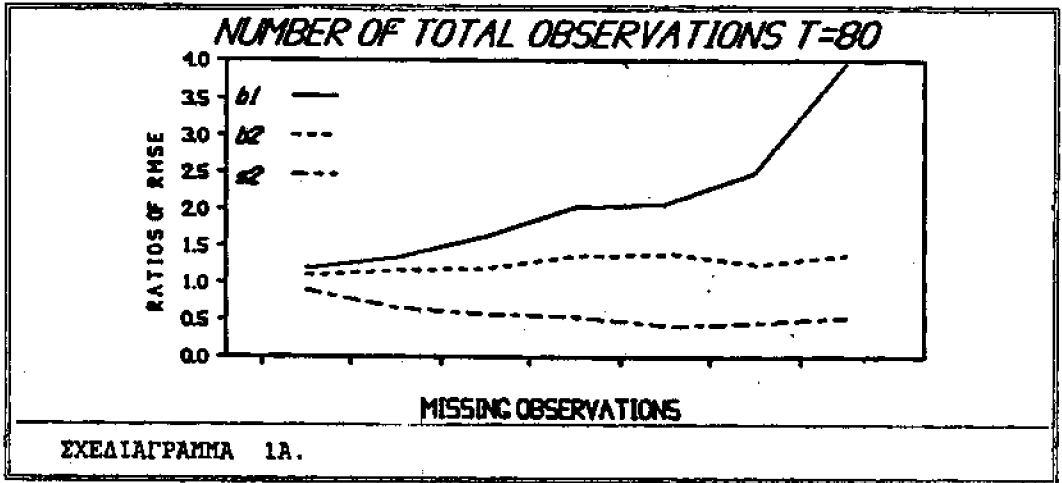
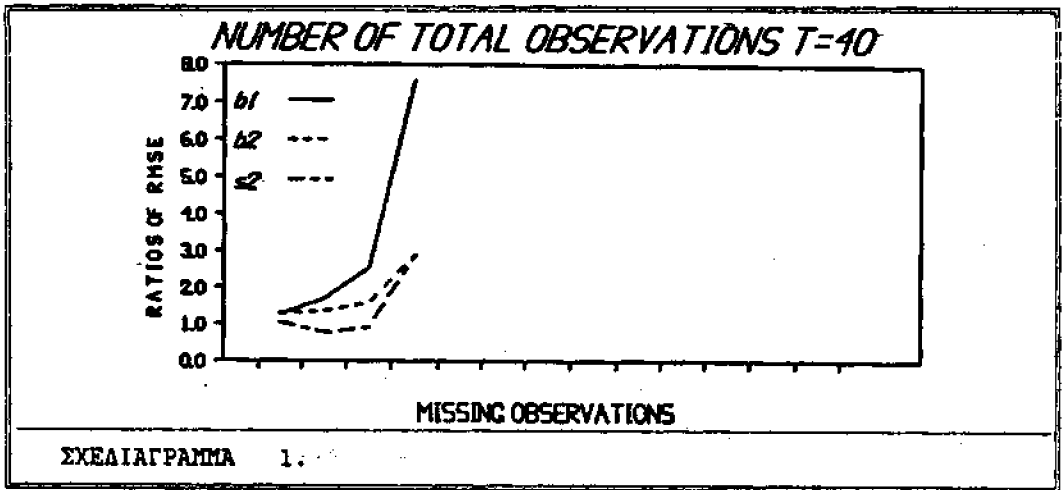
ΠΙΝΑΚΑΣ 3
 Συνοπτικά αποτελέσματα των Monte-Carlo πειραματισμών
 με βάση τις υποθέσεις (3.5) - (3.7)
 $\tau = .75$

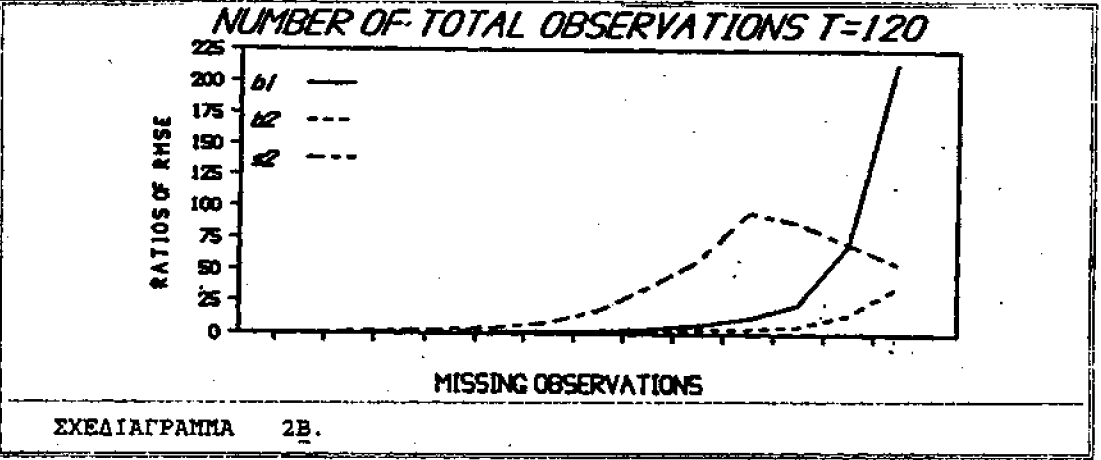
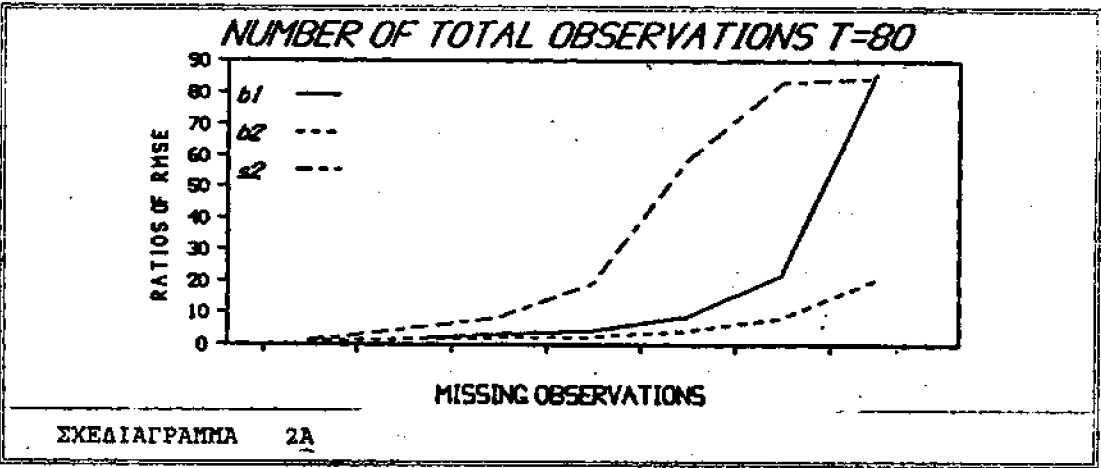
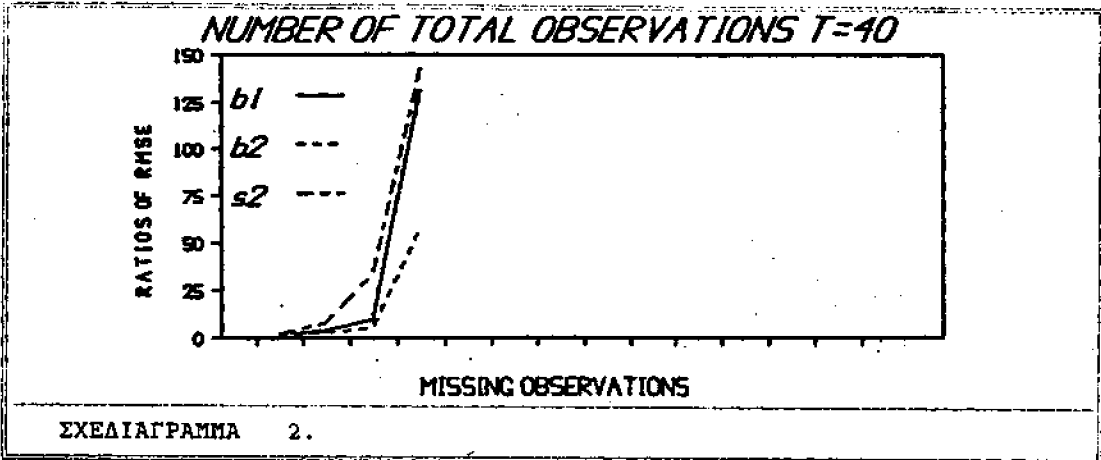
N	M	Λόγος των RMSE b_1	Λόγος των RMSE b_2	Λόγος των RMSE σ^2
40	8	.77413	.83938	2.3688
40	16	.81868	.86776	5.7229
40	24	3.0623	1.0932	5.5673
40	32	7.9529	4.0194	20.006
80	8	1.0181	.99594	1.0360
80	16	.96905	.59657	1.6513
80	24	1.1395	.47469	3.5222
80	32	2.7293	.32848	4.8749
80	40	3.7175	.29655	7.6819
80	48	3.2629	.29788	5.0520
80	56	3.6597	.37455	5.1588
80	64	3.0821	.39065	3.5305
120	8	4.5649	.42795	9.4286
120	16	.96205	.87306	1.4644
120	24	1.0238	.85259	2.5951
120	32	1.1168	.75944	4.3971
120	40	1.1761	.72968	7.5013
120	48	1.3761	.77357	10.617
120	56	1.3492	.74369	10.677
120	64	2.0159	.75535	5.5488
120	72	1.8940	.76570	6.1943
120	80	2.4552	.80385	3.0053
120	88	2.8386	.87287	2.9035
120	96	6.8494	.64035	4.1986
120	104	19.727	.42273	3.7986

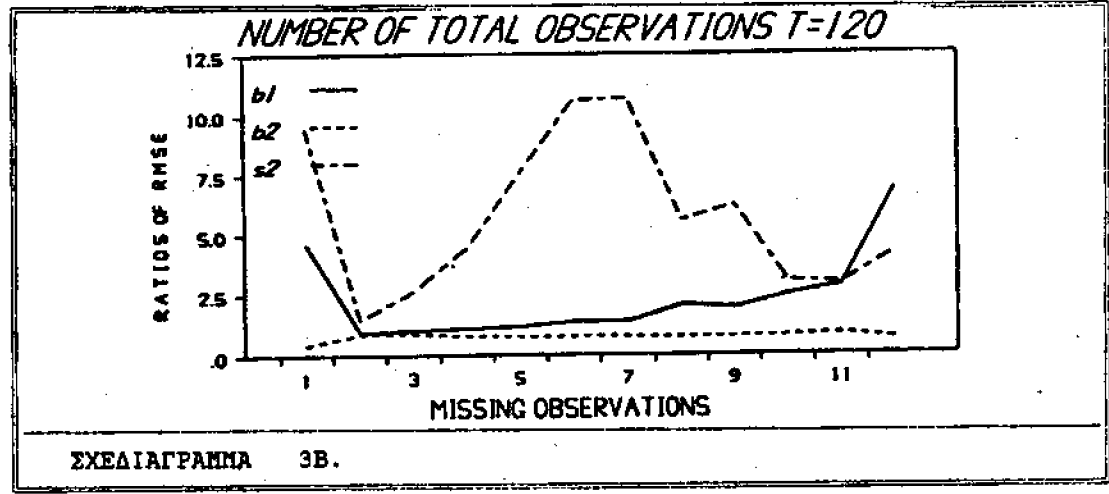
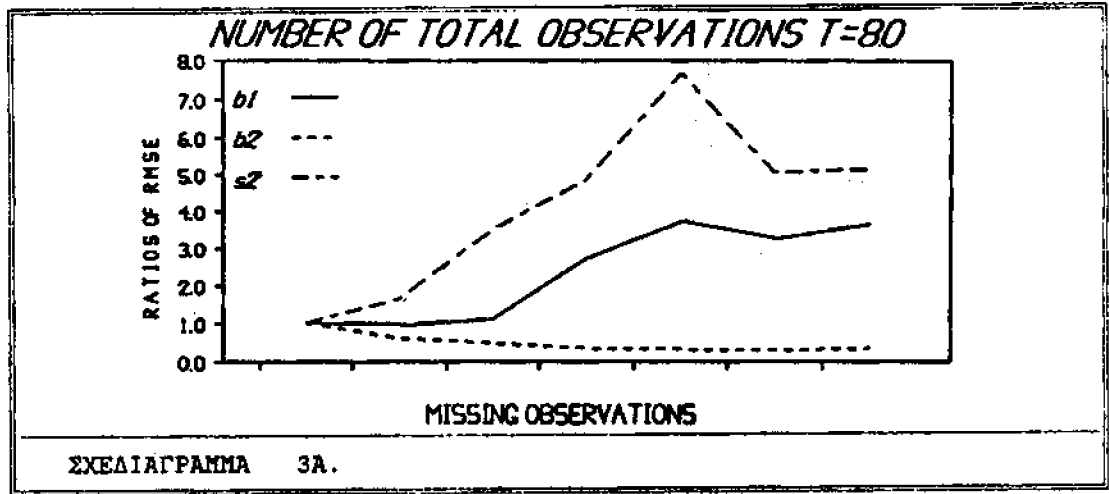
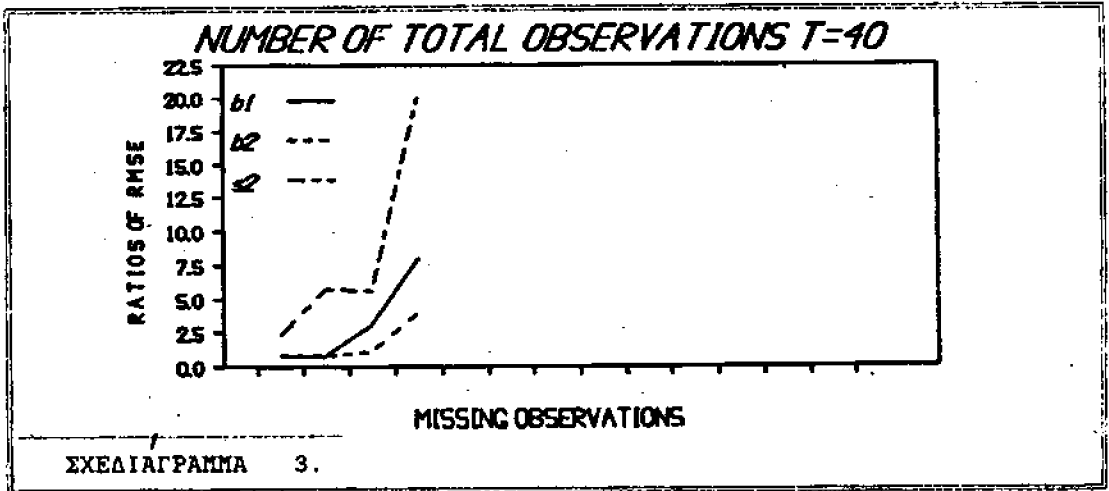
N=Συνολικός αριθμός διαθεσίμων παρατηρήσεων.

M=Αριθμός των ελλειπών παρατηρήσεων.

Πηγή: Επεξεργασία δεδομένων του πίνακα Π3.







4. ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Στη μελέτη αυτή παρουσιάσθηκε μία μέθοδος εκτίμησης δυναμικών και στατικών οικονομετρικών υποδειγμάτων, χρησιμοποιώντας στοιχεία με διάφορη χρονική αθροιστικότητα. Ταυτόχρονα, με τη βοήθεια τεχνικών Monte-Carlo, παρουσιάσαμε την υπεροχή της προταθείσας μεθόδου σε σχέση με άλλες, που συνήθως ακολουθούνται για την αντιμετώπιση προβλημάτων εκτίμησης υποδειγμάτων με διάφορη χρονική αθροιστικότητα. Η εφαρμογή των τεχνικών Monte-Carlo εξαντλήθηκε στο Κλασικό Κανονικό Γραμμικό Υπόδειγμα, μια και το υπολογιστικό κόστος για τις άλλες εξειδικεύσεις, που παρουσιάσθηκαν στο μέρος 1, είναι σχετικά μεγάλο.

Η επέκταση της προταθείσας μεθόδου για πλέον πολύπλοκες εξειδικεύσεις (Υποδείγματα Κατανεμημένων Χρονικών Υστερήσεων)³³, όσο και συστήματα εξισώσεων³⁴, είναι σχετικά εύκολη, αυξάνοντας όμως ουσιαστικά το κόστος υπολογισμών.

³³ Tserkezos D., 1985, «The Simultaneous Use of Annual and Quarterly Data in the Adaptive Expectations Model» και Tserkezos D., 1985a, «Simultaneous Use of Annual and Quarterly Data in the Polynomial Distributed Lag Model».

³⁴ Tserkezos D., 1984, *Simultaneous Use of Annual and Quarterly Data in Econometric Models*, pp. 70-75.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

ΠΙΝΑΚΑΣ Π1

$$y_i = b_1 + b_2 X_2 + u_i \quad u_i \sim NID(0, 3.6)$$

$$X_i = \exp(0.04t) + w_i \quad w_i \sim NID(0, 4.2)$$

N	M		b_1		b_2		σ^2	
			bias	RMSE	bias	RMSE	bias	RMSE
40	8	(A)	0.85158	1.0842	0.40855E-01	0.25083E-02	9.6998	135.54
40	8	(B)	0.57404	0.53688	0.30402E-01	0.14272E-02	6.0981	57.297
40	16	(A)	1.1868	2.1452	0.50379E-01	0.38253E-02	11.499	221.26
40	16	(B)	0.54400	0.44963	0.27794E-01	0.12012E-02	3.7425	27.630
40	24	(A)	1.9107	6.0840	0.73486E-01	0.89504E-02	10.075	186.89
40	24	(B)	0.59979	0.58680	0.30739E-01	0.15476E-02	1.7777	5.5651
40	32	(A)	6.8471	71.258	0.22739	0.78303E-01	15.384	625.35
40	32	(B)	0.58274	0.54334	0.29089E-01	0.13487E-02	1.8491	4.3797
79	8	(A)	0.30540	0.13971	0.43645E-02	0.29721E-04	9.9780	120.69
79	8	(B)	0.26067	0.10273	0.37341E-02	0.22080E-04	8.0035	78.884
79	24	(A)	0.39528	0.23900	0.49795E-02	0.38111E-04	10.101	128.55
79	24	(B)	0.27815	0.11514	0.36821E-02	0.21403E-04	4.4449	27.090
79	32	(A)	0.45911	0.33359	0.54615E-02	0.46157E-04	9.9757	130.07
79	32	(B)	0.25387	0.10110	0.36224E-02	0.20443E-04	3.0095	14.925
79	40	(A)	0.58009	0.53654	0.61954E-02	0.61753E-04	10.435	148.04
79	40	(B)	0.27644	0.12023	0.38377E-02	0.22449E-04	2.0438	7.6480
79	48	(A)	0.79947	1.0641	0.79708E-02	0.10340E-03	10.495	163.12
79	48	(B)	0.26864	0.11650	0.37261E-02	0.22584E-04	1.2409	2.7686
79	56	(A)	1.2410	2.4822	0.11121E-01	0.20252E-03	10.984	192.04
79	56	(B)	0.26915	0.11152	0.39818E-02	0.23580E-04	1.2757	2.3037
79	64	(A)	2.4105	8.7845	0.18724E-01	0.55164E-03	12.341	321.54
79	64	(B)	0.25876	0.10204	0.41835E-02	0.26839E-04	1.7519	3.7889
118	8	(A)	0.20546	0.62912E-01	0.80133E-03	0.96816E-06	9.8087	110.46
118	8	(B)	0.18943	0.53627E-01	0.73308E-03	0.82270E-06	8.4969	83.573
118	16	(A)	0.22505	0.76476E-01	0.79061E-03	0.10152E-05	9.6095	108.40
118	16	(B)	0.19711	0.61790E-01	0.73676E-03	0.87334E-06	7.0218	59.492
118	24	(A)	0.23737	0.91860E-01	0.80914E-03	0.10332E-05	9.7755	111.60
118	24	(B)	0.20072	0.61594E-01	0.66826E-03	0.74619E-06	6.0167	44.167
118	32	(A)	0.25020	0.96348E-01	0.86058E-03	0.12002E-05	9.5996	108.35
118	32	(B)	0.16243	0.44645E-01	0.66064E-03	0.70547E-06	4.7821	29.051
118	40	(A)	0.27004	0.11350	0.82054E-03	0.10405E-05	9.7634	115.61
118	40	(B)	0.19240	0.57286E-01	0.67791E-03	0.74309E-06	3.7205	18.619
118	48	(A)	0.27860	0.11846	0.81836E-03	0.10561E-05	9.4783	111.05
118	48	(B)	0.17734	0.47954E-01	0.65986E-03	0.72410E-06	2.7538	11.938
118	56	(A)	0.30739	0.14805	0.93802E-03	0.13397E-05	9.9644	121.69
118	56	(B)	0.16926	0.46608E-01	0.71066E-03	0.80713E-06	1.9612	6.3353
118	64	(A)	0.40442	0.25789	0.10980E-02	0.19498E-05	9.5580	118.46
118	64	(B)	0.19253	0.58022E-01	0.69215E-03	0.75682E-06	1.3507	3.2607
118	72	(A)	0.51523	0.41821	0.13376E-02	0.26571E-05	9.4671	118.91
118	72	(B)	0.18291	0.52886E-01	0.68102E-03	0.74025E-06	1.0797	2.0647
118	80	(A)	0.63167	0.65340	0.14440E-02	0.33710E-05	9.8086	134.04

ΠΙΝΑΚΑΣ Π1
(Συνέχεια)

N	M		b ₁		b ₂		σ ²	
			bias	RMSE	bias	RMSE	bias	RMSE
118	80	(B)	0.17997	0.48707E-01	0.67568E-03	0.73955E-06	0.96051	1.3971
118	88	(A)	0.84906	1.1225	0.17276E-02	0.46754E-05	11.037	180.04
118	88	(B)	0.17445	0.48558E-01	0.69995E-03	0.74184E-06	1.2475	2.0602
118	96	(A)	1.3987	3.1391	0.25751E-02	0.10779E-04	11.463	236.21
118	96	(B)	0.16808	0.44415E-01	0.66037E-03	0.67381E-06	1.6747	3.3395
118	104	(A)	2.6632	10.866	0.44102E-02	0.30170E-04	11.219	267.36
118	104	(B)	0.18146	0.50737E-01	0.72818E-03	0.82193E-06	2.0990	4.8125

N=Συνολικός αριθμός διαθεσίμων παρατηρήσεων.

M=Αριθμός των ελλিপών παρατηρήσεων.

ΠΙΝΑΚΑΣ Π2

$$y_t = b_1 + b_2 X_t + u_t, \quad u_t \sim NID(0, 3.6)$$

$$X_t = \tau X_{t-1} + \sqrt{(1-\tau^2)} \xi_t, \quad \xi_t \sim NID(0, 1)$$

N	M		b ₁		b ₂		σ ²	
			bias	RMSE	bias	RMSE	bias	RMSE
<i>τ=0.25000</i>								
40	8	(A)	0.16185	0.41169E-01	0.22604	0.78734E-01	0.89287	1.2508
40	8	(B)	0.14144	0.32409E-01	0.19895	0.60117E-01	0.97761	1.2204
40	16	(A)	0.19398	0.58753E-01	0.23335	0.87495E-01	1.0349	1.6266
40	16	(B)	0.14743	0.34721E-01	0.19667	0.63618E-01	1.3588	2.1066
40	24	(A)	0.23423	0.89092E-01	0.26878	0.11770	1.3138	2.9420
40	24	(B)	0.15093	0.34902E-01	0.21971	0.72918E-01	1.7360	3.1670
40	32	(A)	0.38949	0.24119	0.38276	0.23187	2.3034	11.984
40	32	(B)	0.14637	0.31809E-01	0.22649	0.79857E-01	2.0262	4.1840
80	8	(A)	0.11742	0.20789E-01	0.11553	0.20451E-01	0.62988	0.59072
80	8	(B)	0.10843	0.17438E-01	0.10859	0.18674E-01	0.70166	0.67338
80	16	(A)	0.12150	0.22323E-01	0.14858	0.33928E-01	0.65915	0.65167
80	16	(B)	0.10463	0.16742E-01	0.13573	0.29117E-01	0.89719	1.0105
80	24	(A)	0.13825	0.30402E-01	0.13579	0.28667E-01	0.72326	0.79970
80	24	(B)	0.10742	0.18649E-01	0.12490	0.23937E-01	1.1111	1.4213
80	32	(A)	0.15597	0.38772E-01	0.14720	0.33141E-01	0.76601	0.99 13
80	32	(B)	0.11104	0.19170E-01	0.12619	0.24370E-01	1.3025	1.8700
80	40	(A)	0.16054	0.38977E-01	0.15362	0.40105E-01	0.84021	1.0860
80	40	(B)	0.10829	0.18807E-01	0.13229	0.28616E-01	1.5736	2.5908
80	48	(A)	0.16591	0.42037E-01	0.15957	0.40897E-01	0.94121	1.4452
80	48	(B)	0.10514	0.16849E-01	0.14524	0.32626E-01	1.7383	3.0938
80	56	(A)	0.20508	0.66276E-01	0.20060	0.60312E-01	1.0867	2.0110
80	56	(B)	0.10254	0.16761E-01	0.16793	0.43700E-01	1.9230	3.7482
80	64	(A)	0.26495	0.10422	0.20921	0.69632E-01	1.4645	4.3657
80	64	(B)	0.10701	0.16823E-01	0.17739	0.48362E-01	2.0748	4.3349

N=Συνολικός αριθμός διαθεσίμων παρατηρήσεων.

M=Αριθμός των ελλিপών παρατηρήσεων.

ΠΙΝΑΚΑΣ Π2
(Συνέχεια)

N	M		b_1		b_2		σ^2	
			bias	RMSE	bias	RMSE	bias	RMSE
$\tau=0.25000$								
120	8	(A)	0.92120E-01	0.13305E-01	0.95922E-01	0.14337E-01	0.53497	0.42572
120	8	(B)	0.89380E-01	0.12397E-01	0.96678E-01	0.14665E-01	0.59888	0.49649
120	16	(A)	0.87941E-01	0.12467E-01	0.95769E-01	0.14347E-01	0.55902	0.44495
120	16	(B)	0.85310E-01	0.11142E-01	0.95298E-01	0.14139E-01	0.71407	0.65789
120	24	(A)	0.10090	0.16226E-01	0.99842E-01	0.14606E-01	0.53542	0.43804
120	24	(B)	0.90629E-01	0.12521E-01	0.95417E-01	0.13357E-01	0.84593	0.85437
120	32	(A)	0.10861	0.18038E-01	0.99042E-01	0.14872E-01	0.56693	0.48813
120	32	(B)	0.84377E-01	0.11203E-01	0.94727E-01	0.13616E-01	1.0149	1.1698
120	40	(A)	0.10103	0.16119E-01	0.10918	0.18798E-01	0.59329	0.53139
120	40	(B)	0.82934E-01	0.10792E-01	0.10834	0.17907E-01	1.1857	1.5272
120	48	(A)	0.11106	0.19616E-01	0.10970	0.18844E-01	0.65580	0.66424
120	48	(B)	0.87191E-01	0.12045E-01	0.10650	0.17838E-01	1.3484	1.9409
120	56	(A)	0.11693	0.21869E-01	0.11995	0.23205E-01	0.69207	0.73733
120	56	(B)	0.81474E-01	0.10730E-01	0.11634	0.21312E-01	1.5148	2.3826
120	64	(A)	0.12332	0.25028E-01	0.12670	0.25088E-01	0.72943	0.81114
120	64	(B)	0.82009E-01	0.10441E-01	0.12408	0.23353E-01	1.6417	2.7672
120	72	(A)	0.14290	0.31512E-01	0.13657	0.28797E-01	0.77213	0.88225
120	72	(B)	0.89777E-01	0.12780E-01	0.13314	0.26699E-01	1.7855	3.2349
120	80	(A)	0.15450	0.38371E-01	0.16263	0.41665E-01	0.84163	1.0961
120	80	(B)	0.88453E-01	0.12069E-01	0.14703	0.32782E-01	1.8940	3.6235
120	88	(A)	0.17489	0.49071E-01	0.18790	0.56311E-01	0.98035	1.5556
120	88	(B)	0.89817E-01	0.12162E-01	0.16103	0.39122E-01	1.9834	3.9596
120	96	(A)	0.22498	0.79590E-01	0.21658	0.71134E-01	1.2417	2.8610
120	96	(B)	0.87436E-01	0.12201E-01	0.16164	0.40093E-01	2.0723	4.3123
120	104	(A)	0.30160	0.14519	0.23930	0.87055E-01	1.5660	5.5814
120	104	(B)	0.86250E-01	0.11369E-01	0.17438	0.45318E-01	2.1479	4.6263

N=Συνολικός αριθμός διαθέσιμων παρατηρήσεων.

M=Αριθμός των ελλিপών παρατηρήσεων.

ΠΙΝΑΚΑΣ Π3

$$y_t = b_1 + b_2 X_t + u_t, \quad u_t \sim NID(0, 3.6)$$

$$X_t = \tau X_{t-1} + \sqrt{(1-\tau^2)} \xi_t, \quad \xi_t \sim NID(0, 1)$$

N	M		b_1		b_2		σ^2	
			bias	RMSE	bias	RMSE	bias	RMSE
$\tau=0.75000$								
40	8	(A)	0.21033	0.66443E-01	0.32449	0.14956	1.4446	4.1035
40	8	(B)	0.24702	0.85829E-01	0.36913	0.17818	0.97044	1.7323
40	16	(A)	0.20278	0.66407E-01	0.34236	0.17783	1.9268	7.3837
40	16	(B)	0.23262	0.81115E-01	0.39075	0.20493	0.95233	1.2902
40	24	(A)	0.36910	0.20106	0.43054	0.29443	2.0134	10.309
40	24	(B)	0.20544	0.65657E-01	0.45883	0.26932	1.2322	1.8517
40	32	(A)	0.60110	0.56447	0.85218	1.1073	4.4284	55.478
40	32	(B)	0.21909	0.70977E-01	0.47223	0.27549	1.5914	2.7731

ΠΙΝΑΚΑΣ Π3
(Συνέχεια)

N	M		b_1		b_2		σ^2	
			bias	RMSE	bias	RMSE	bias	RMSE
$r=0.75000$								
79	8	(A)	0.11381	0.20976E-01	0.25191	0.84152E-01	1.2398	2.4063
79	8	(B)	0.12019	0.21646E-01	0.34735	0.14106	0.94949	1.4572
79	16	(A)	0.13363	0.26608E-01	0.21550	0.65972E-01	1.5130	3.8149
79	16	(B)	0.12447	0.23350E-01	0.34542	0.13898	0.78356	1.0831
79	24	(A)	0.20462	0.61887E-01	0.17985	0.52991E-01	1.3930	3.2231
79	24	(B)	0.11990	0.22675E-01	0.37150	0.16132	0.64846	0.66116
79	32	(A)	0.22970	0.78663E-01	0.18369	0.50434E-01	1.7172	5.2920
79	32	(B)	0.11737	0.21160E-01	0.38208	0.17007	0.69027	0.68889
79	40	(A)	0.22658	0.75113E-01	0.19221	0.58614E-01	1.7528	5.3031
79	40	(B)	0.12033	0.23020E-01	0.41372	0.19677	0.90582	1.0497
79	48	(A)	0.19991	0.62812E-01	0.21917	0.73306E-01	2.1365	7.8821
79	48	(B)	0.10470	0.17163E-01	0.41157	0.19572	1.1496	1.5279
79	56	(A)	0.21229	0.70010E-01	0.26297	0.10802	2.1157	8.8507
79	56	(B)	0.12261	0.22715E-01	0.50092	0.27651	1.5407	2.5069
79	64	(A)	0.26004	0.10270	0.27718	0.12097	3.5783	30.529
79	64	(B)	0.12447	0.22498E-01	0.50438	0.28267	1.7722	3.2379
118	8	(A)	0.95874E-01	0.13893E-01	0.37175	0.15069	1.4745	3.2358
118	8	(B)	0.96915E-01	0.14441E-01	0.40124	0.17260	1.1893	2.2097
118	16	(A)	0.94827E-01	0.14529E-01	0.36057	0.14327	1.5186	3.2120
118	16	(B)	0.94419E-01	0.14191E-01	0.39540	0.16804	0.87638	1.2377
118	24	(A)	0.99650E-01	0.15907E-01	0.35499	0.14153	1.4441	3.1165
118	24	(B)	0.95068E-01	0.14244E-01	0.41611	0.18636	0.63016	0.70877
118	32	(A)	0.10131	0.16446E-01	0.33674	0.12835	1.8322	4.8583
118	32	(B)	0.95112E-01	0.13983E-01	0.40410	0.17590	0.60474	0.64766
118	40	(A)	0.10850	0.17947E-01	0.38369	0.16204	1.8647	5.1212
118	40	(B)	0.91409E-01	0.13042E-01	0.44407	0.20947	0.55557	0.48235
118	48	(A)	0.11500	0.20723E-01	0.37785	0.15918	1.9127	5.4416
118	48	(B)	0.97832E-01	0.15359E-01	0.44839	0.21404	0.59313	0.50966
118	56	(A)	0.12726	0.25070E-01	0.40172	0.17663	1.6875	4.6467
118	56	(B)	0.87002E-01	0.12436E-01	0.47172	0.23384	0.81436	0.83742
118	64	(A)	0.13215	0.26474E-01	0.41183	0.18497	2.1178	6.7574
118	64	(B)	0.95791E-01	0.13978E-01	0.47877	0.24157	0.96062	1.0909
118	72	(A)	0.14270	0.31822E-01	0.47659	0.24905	1.7788	5.6362
118	72	(B)	0.91333E-01	0.12961E-01	0.54305	0.30982	1.3131	1.8754
118	80	(A)	0.16127	0.40760E-01	0.49121	0.26894	1.9625	6.9611
118	80	(B)	0.96071E-01	0.14359E-01	0.54142	0.30811	1.5184	2.3975
118	88	(A)	0.22523	0.80323E-01	0.39649	0.19950	2.5664	11.400
118	88	(B)	0.83583E-01	0.11727E-01	0.54583	0.31155	1.6216	2.7152
118	96	(A)	0.40727	0.23337	0.31120	0.13482	2.6625	12.642
118	96	(B)	0.89054E-01	0.11830E-01	0.55178	0.31893	1.8098	3.3281
118	104	(A)	0.57369	0.47458	0.33573	0.16353	3.0970	23.458
118	104	(B)	0.88660E-01	0.11843E-01	0.57513	0.34732	2.0031	4.0441

N=Συνολικός αριθμός διαθέσιμων παρατηρήσεων.

M=Αριθμός των ελλিপών παρατηρήσεων.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

- Almon S., 1965, «The distributed lag between capital appropriations and expenditures», *Econometrica*, pp. 178-196.
- Anderson T. W., 1957, «Maximum likelihood estimates for a multivariate normal distribution when some observations are missing», *Journal of the American Statistical Association*, 52, pp. 200-203.
- Boot J. C.G., Feibes W., Lisman J., 1967, «Further Methods of Derivation of Quarterly Figures from Annual Data», *Applied Statistics*, 16, pp. 65-75.
- Chow G. and Lin A., 1971, «Best linear unbiased interpolation distribution and extrapolation of time series by related time series», *Review of Economics and Statistics*, 53, pp. 372-375.
- Cohen J., Muller W., Padberg M., 1971, «Autoregressive approaches to disaggregation of time series data», *Journal of the Royal Statistical Society, Series C*, 20, pp. 119-129.
- Denton F., 1971, «Adjustment of monthly or quarterly series to annual totals: an approach based on quadratic minimization», *Journal of the American Statistical Association*, 66, pp. 99-102.
- Friedman M., 1962, «The interpolation of time series by related series», *Journal of the American Statistical Association*, 57, 129-205.
- Γκαμαλέτσος Θ., 1973, *Οικονομετρία*, Athens.
- Gilbert C. L., 1976, *Missing data in regression analysis. The exogenous case*, University of Bristol.
- Gilbert C. L., 1977, «Estimation of regression equations using mixed annual and quarterly data», *Journal of Econometrics*, pp. 221-239.
- Ginsburg V. A., 1973, «A further note on the derivation of quarterly figures consistent with annual data», *Applied Statistics*, 21, pp. 368-374.
- Goldberger A. S., 1964, *Econometric Theory*, New York, Wiley.
- Harvey G., 1981, *The Econometric Analysis of Time Series*, Phillip Allan, London.
- Hatanaka Michio, 1974, «An efficient two-step estimator for the dynamic adjustment model with autoregressive errors», *Journal of Econometrics*, pp. 199-220.
- Hendry D. F., 1971, «Maximum likelihood estimation of systems of simultaneous regression equations with errors generated by a vector autoregressive process», *International Economic Review*, 12.
- Judge G., Hill R., Griffiths W., Lutkepohl H., and Lee T., 1982, *Introduction to the theory and practice of econometrics*, John Wiley.
- Lisman J. and Sandee J., 1964, «Derivation of quarterly figures from annual data», *Applied Statistics*, 13, pp. 87-90.
- Maddala S. G., 1977, *Econometrics*, McCraw-Hill Ltd.
- Moriguchi C., 1970, «Aggregation over time in macroeconomic relations», *International Economic Review*, Vol. 11, no 3.
- Phillips A. W., 1966, «Estimation of stochastic difference equations with moving average disturbances», Paper Presented to the Econometric Society, San Francisco.
- Sargan J. D., 1961, «The maximum likelihood estimation of economic relationships with autoregressive residuals», *Econometrica*, 29.
- Sargan J. D. and Drettakis E. S., 1974, «Missing data in an autoregressive model», *International Economic Review*, pp. 39-58.
- Schmidt Peter, 1974, «An Argument for the usefulness of the gamma distributed lag model», *International Economic Review*, pp. 246-250.

- Stram O. and Wei S., 1986, «A methodological note on the disaggregation of time series totals», *Journal of Time Series Analysis*, 7, pp. 293-302.
- Theil H., 1961, *Economic forecast and policy*, North-Holland, Amsterdam.
- Theil H. and Coldberg A. S., 1961, «On pure and mixed statistical estimation in economics», *International Economic Review*, vol. 2.
- Tserkezos Ef. Dikaïos, 1984, *Simultaneous use of annual and quarterly data in econometric models*, Department of Econometrics University of Manchester.
- , 1985, «The simultaneous use of annual and quarterly data in the adaptive expectations model», *Spoudai*, pp. 370-387.
- , 1985a, «Simultaneous use of annual and quarterly data in the polynomial distributed lag model», *Service for Regional Development of Epirous*, Ministry of National Economy.
- , 1986, «Some quarterly estimates of the Gross Domestic Product of the Hellenic Economy. Period 1970 I ... 1985 IV», *Service for Regional Development of Epirous*, Ministry of National Economy, (Forthcoming in Economics of Planning).
- , 1988, «Some quarterly estimates of the Gross Domestic Product of the Agricultural Sector of the Hellenic Economy. Period 1970 I...1986 IV. (in Greek)», *Greek Review of Agrarian Studies*, Agricultural Bank of Greece.
- , 1990, «Simultaneous use of annual and quarterly data in the geometric declining distributed lag model», *Greek Economic Review*, Vol. 12, pp. 157-173.
- , 1991, «A distributed lag model for quarterly disaggregation of the annual personal disposable income of the Greek economy», *Economic Modelling*, October, pp. 528-536.
- Zellner A. and Geisel M., 1970, «Analysis of distributed lag models whith application to consumption function estimation», *Econometrica*, pp. 865-888.