Κ. ΜΑΡΓΑΡΙΤΗ, Μ. ΑΔΑΜΟΠΟΥΛΟΥ, Κ. ΓΟΥΛΙΑΝΑ

ΕΠΙΛΥΣΗ ΓΡΑΜΜΙΚΩΝ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ ΜΕ ΕΛΑΧΙΣΤΟΠΟΙΗΣΗ ΤΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ ΕΝΕΡΓΕΙΑΣ ΝΕΥΡΟΜΟΡΦΙΚΟΥ ΔΙΚΤΥΟΥ

ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Η εργασία αυτή περιγράφει την επίλυση Συστημάτων Γραμμικών Εξισώσεων με τη βοήθεια των Νευρομορφικών Δικτύων. Ένα γραμμικό σύστημα με μήτρα των συντελεστών την A, μεγέθους mxn μετασχηματίζεται σε σύστημα κανονικών εξισώσεων, το οποίο επιλύεται μέσω της ελαχιστοποίησης της συνάρτησης ενέργειας (συνάρτηση Lyapunov) ενός νευρομορφικού δικτύου τύπου Hopfield. Η λειτουργία του δικτύου προσομοιώνεται με την επαναληπτική επίλυση των αντιστοίχων συστημάτων κανονικών διαφορικών εξισώσεων. Επίσης παρουσιάζονται νευρομορφικά δίκτυα για τον μετασχηματισμό γενικών γραμμικών συστημάτων με συστήματα κανονικών εξισώσεων.

Έστω ένα σύστημα γραμμικών εξισώσεων[5]

$$Ax = b \tag{1.1}$$

όπου A είναι μία mxn μήτρα πραγματικών αριθμών με τάξη $r(A)=\min(m,n)$ και b ένα mx1 διάνυσμα. Διακρίνονται τρεις περιπτώσεις:

α) Υπερκαθορισμένο σύστημα $(m>n)$

Σύστημα με πλήθος εξισώσεων μεγαλύτερο από το πλήθος των αγνώστων.

β) Κανονικό ή Τετραγωνικό σύστημα $(m=n)$

Σύστημα με πλήθος εξισώσεων ίσο με τον αριθμό των αγνώστων και μη ιδιάζον, δηλαδή με τάξη $r(A)=n$ ή ορίζουσα $\delta=|A|=0$.

γ) Υποκαθορισμένο ή Αόριστο σύστημα $(m<n)$

Σύστημα με πλήθος εξισώσεων μικρότερο από το πλήθος των αγνώστων.

Η επίλυση του συστήματος (1.1) σε κάθε μία από τις παραπάνω περιπτώσεις έχει ως εξής:

1.1. Υπερκαθορισμένο σύστημα[2]

Για τα συστήματα της κατηγορίας αυτής δεν υπάρχει συνήθως ακριβής λύση. Η καλύτερη επιλογή είναι η λύση των Ελαχίστων Τετραγώνων, η οποία ελαχιστοποιεί την Ευκλείδεια απόσταση:

$$(r^t r)^{1/2} = \|r\|_2,\ r = b - Ax,\ \text{για όλα τα } x \in R^n \tag{1.2}$$

Η λύση των Ελαχίστων Τετραγώνων του συστήματος (1.1) στην περίπτωση αυτή χαρακτηρίζεται από τα ακόλουθα θεωρήματα:

Θεώρημα 1.1.1

Υποθέσεις

α) $A \in R^{m \times n}$, $b \in R^n$, $m > n$

β) Υπάρχει $x_o \in R^n$ τέτοιο ώστε $A^t(Ax_o - b) = 0$ (1.3)

Συμπέρασμα

Για κάθε διάνυσμα $y \in R^n$ ισχύει: $\|b - Ax_o\|_2 < \|b - Ay\|_2$

Σημείωση

Το σύστημα (1.3) ονομάζεται Σύστημα Κανονικών Εξισώσεων αντίστοιχο του συστήματος (1.1).

Απόδειξη

Εάν θέσουμε $r_x = b - Ax_o$, $r_y = b - Ay$, τότε είναι:

$r_y = b - Ay - Ax_o + Ax_o = (b - Ax_o) + (Ax_o - Ay)$ ή

$r_y = r_x + A(x_o - y)$ (1.4)

Εάν τετραγωνίσουμε τη σχέση (1.4) και επειδή $A^t(r_x)=0$, ευρίσκουμε:

$(r_y^t\, r_y) = (r_x^t\, r_x) + (x_o^t - y)\, A^t A(x_o - y)$ ή

$\|r_y\| 2^2 = \| r_x\| 2^2 + \| A(x_o - y)\| 2^2 > \| r_x \| 2^2$

Δηλαδή η λύση του συστήματος (1.3) αποτελεί την καλύτερη προσέγγιση με τη μέθοδο των ελαχίστων τετραγώνων της λύσης του συστήματος (1.1), όταν πληρούνται οι υποθέσεις του θεωρήματος (1.1.1).

Θεώρημα 1.1.2

Η μήτρα A^tA είναι μη ιδιάζουσα τότε και μόνον τότε εάν τα διανύσματα των στηλών της A είναι γραμμικώς ανεξάρτητα.

Απόδειξη

Εάν τα διανύσματα των στηλών της A είναι γραμμικώς ανεξάρτητα, τότε για κάθε διάνυσμα $x \in R^n$ διάφορο του μηδενός συνεπάγεται ότι το διάνυσμα Ax είναι επίσης διάφορο του μηδενός. Έτσι:

$$x^t A^t A x = (Ax)^t (Ax) = \|Ax\| 2^2 > 0$$

Δηλαδή η μήτρα A^tA είναι θετικώς ορισμένη και σύμφωνα με το κριτήριο του Silvester η διακρίνουσά της είναι διάφορος του μηδενός και θετική. Η μήτρα λοιπόν A^tA δεν είναι ιδιάζουσα. Ακόμη εάν τα διανύσματα των στηλών της A είναι γραμμικώς εξαρτημένα, τότε για κάποιο $x \in R^n$ διάφορο του μηδενός θα ισχύει $Ax=0$ και $A^tAx=0$, πράγμα που σημαίνει ότι η μήτρα A^tA είναι, στη δεύτερη αυτή περίπτωση, ιδιάζουσα. Από το θεώρημα αυτό συνεπάγεται ότι όταν οι στήλες της μήτρας A είναι γραμμικώς ανεξάρτητες, η λύση του συστήματος των κανονικών εξισώσεων (η λύση των ελαχίστων τετραγώνων) είναι μοναδική.

1.2. Τετραγωνικό σύστημα[2,3]

Για την περίπτωση αυτή ισχύουν τα παρακάτω θεωρήματα:

Θεώρημα 1.2.1

Υποθέσεις

α) $A \in R^{n \times n}$, $b \in R^n$,$|A| \neq 0$

Συμπεράσματα

α) Η μήτρα A^tA είναι συμμετρική θετικώς ορισμένη.

β) Τα γραμμικά συστήματα:

$$Ax - b = 0 \text{ και } A^t(Ax - b) = 0 \qquad (1.5)$$

είναι ισοδύναμα.

Απόδειξη

α) Για κάθε διάνυσμα $x \in R^n$ διάφορο του μηδενός το διάνυσμα Ax είναι επίσης διάφορο του μηδενός και

$x^tA^tAx = (Ax)^t (Ax) = \|Ax\| 2^2 > 0$

β) Είναι προφανές ότι αν x_o είναι η λύση του Ax-b=0, τότε αυτή είναι και λύση του $A^t(Ax-b)=0$.

γ) Εάν x_o είναι η λύση του $A^t(Ax-b)=0$, τότε:

$A^t(Ax_o - b) = 0 => A^tAx_o - A^tb = 0 => A^tAx_o = A^tb =>$

$(A^tA)^{-1} (A^tAx_o) = (A^tA)^{-1} A^tb =>$

$A^{-1} (A^t)^{-1} A^tAx_o = A^{-1}(A^t)^{-1} A^t b => x_o = A^{-1}b$

Παρατηρούμε ότι, σε αντίθεση με το θεώρημα 1.1.1, η λύση του συστήματος των κανονικών εξισώσεων με τη μέθοδο των ελαχίστων τετραγώνων επαληθεύει ακριβώς το αρχικό σύστημα.

1.3. Αόριστο σύστημα[3]

Θεώρημα 1.3.1

Υποθέσεις

α) $A \in R^{m \times n}$, $b \in R^n$, rank (A) = r

Συμπέρασμα

Ο χώρος των λύσεων του γραμμικού συστήματος:

$$Ax = 0 \tag{1.6}$$

έχει διάσταση k=n-r. Εάν γνωρίζουμε για το σύστημα (1.6) μία βάση του χώρου των λύσεων:

$x^{(1)} = (x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, ..., x_n^{(1)})$

$x^{(2)} = (x_1^{(2)}, x_2(2), ..., x_n^{(2)})$

....

$x^{(k)} = (x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, ..., x_n^{(k)})$

τότε όλες οι λύσεις του συστήματος δίδονται από τον τύπο:

$$x = c_1x^{(1)} + c_2x^{(2)} + \dots + c_kx^{(k)}$$

όπου c_1, c_2, ..., c_k είναι αυθαίρετες σταθερές. Για τον προσδιορισμό μιας βάσης του χώρου των λύσεων του συστήματος (1.6) εργαζόμαστε ως εξής: Προσδιορίζουμε επί της μήτρας A την ελάσσονα ορίζουσα δr, που είναι διάφορος του μηδενός:

$$\delta r = \begin{vmatrix} a_{11} \; a_{12} \dots \; a_{1r} \\ a_{21} \; a_{22} \dots \; a2r \\ \dots\dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots\dots \\ a_{r1} \; a_{r2} \dots \; a_{rr} \end{vmatrix} \neq 0$$

και επιλύουμε τα k=n-r γραμμικά συστήματα:

$$\begin{vmatrix} a_{11} \; a_{12} \dots \; a_{1r} \\ a_{21} \; a_{22} \dots \; a2r \\ \dots\dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots\dots \\ a_{1r} \; a_{2r} \dots \; a_{rr} \end{vmatrix} * \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ .. \\ .. \\ x_r \end{vmatrix} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 1 & 2 & \dots\ k \end{array} \\ \begin{vmatrix} a_{1,\ r+1} & a_{1,\ r+2} & \dots\ a_{1n} \\ a_{2,\ r+1} & a_{2,\ r+2} & \dots\ a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{r,\ r+1} & a_{r,\ r+2} & \dots\ a_{rn} \end{vmatrix} \end{array}$$

εάν μάλιστα θέσουμε:

$x_{r+1}=1 \quad x_{r+2}=0, \dots x_n=0$ (σύστημα 1)

$x_{r+1}=0 \quad x_{r+2}=1, \dots x_n=0$ (σύστημα 2)

....

$x_{r+1}=0 \quad x_{r+2}=0 \dots x_n=1$ (σύστημα k)

τότε η λύση των συστημάτων απλοποιείται και η ζητούμενη βάση θα έχει τη μορφή:

$$x^{(1)} = \begin{vmatrix} x_1^{(1)} \\ x_2^{(1)} \\ x_3^{(1)} \\ \dots \\ x_r^{(1)} \\ 1 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{vmatrix} \quad x^{(1)} = \begin{vmatrix} x_1^{(2)} \\ x_2^{(2)} \\ x_3^{(2)} \\ \dots \\ x_r^{(2)} \\ 0 \\ 1 \\ \dots \\ 0 \end{vmatrix} \quad \dots \quad x^{(1)} = \begin{vmatrix} x_1^{(k)} \\ x_2^{(k)} \\ x_3^{(k)} \\ \dots \\ x_r^{(k)} \\ 0 \\ 0 \\ \dots \\ 1 \end{vmatrix}$$

Είναι γνωστό ότι κάθε γραμμικός συνδυασμός των k λύσεων της βάσης είναι επίσης λύση του ομογενούς γραμμικού συστήματος (1.6).

Θεώρημα 1.3.2

Υποθέσεις

α) $A \in R^{m \times n}$, $b \in R^n$, rank (A) = r

Συμπέρασμα

Τα γραμμικά συστήματα:

$$Ax - b = 0 \text{ και } A^t(Ax - b) = 0 \tag{1.7}$$

είναι ισοδύναμα.

Απόδειξη

α) Αποδεικνύεται εύκολα ότι αν x_o είναι λύση του Ax-b=0, τότε αυτό επαληθεύεται και το A^t (Ax-b)=0.

β) Εάν x_o είναι μία λύση του $A^t(Ax-b)=0$ με $Ax_o-b=c$, τότε από τη σχέση $A^tc=0$, $c \in R^r$ λαμβάνουμε υποχρεωτικά c=0, αφού η τάξη της μήτρας A είναι r.

Θεώρημα 1.3.3

Υποθέσεις

α) $A \in R^{m \times n}$, $b \in R^n$, rank (A) = r

β) x_o είναι λύση του γραμμικού συστήματος Ax=b

γ) $x^{(o)} = c_1x^{(1)} + c_2x^{(2)} + \dots + c_kx^{(k)}$

είναι η γενική λύση του ομογενούς συστήματος Ax=0, όπως αυτή προσδιορίζεται από το θεώρημα 1.3.2.

Συμπέρασμα

Η γενική λύση του μη ομογενούς συστήματος Ax=b είναι η:

$$x^{(\mu o)} = c_1x^{(1)} + c_2x^{(2)} + \ldots + c_kx^{(k)} + x_o$$

Απόδειξη

Έχουμε

$$Ax^{(\mu o)} = A(c_1x^{(1)} + c_2x^{(2)} + \ldots + c_kx^{(k)} + x_o) \Rightarrow$$

$$Ax^{(\mu o)} = \underbrace{Ac_1x^{(1)} + Ac_2x^{(2)} + \ldots + Ac_kx^{(k)}}_{0} + Ax_o = b$$

Θεώρημα 1.3.4

Δίδεται η συνάρτηση:

$$\Phi(x) = 1/2x^tAx - x^tb \tag{1.8}$$

με $A \in R^{n \times n}$, $b \in R^n$ και A συμμετρική θετικώς ορισμένη. Να αποδειχθεί ότι η λύση του γραμμικού συστήματος $Ax=b$ ελαχιστοποιεί τη συνάρτηση $\Phi(x)$.

Απόδειξη

Εάν λάβουμε την κλίση της συνάρτησης (1.8), ευρίσκουμε

$$\text{grad}\ (\Phi(x)) = 1/2Ax + 1/2x^tA - b \text{ ή}$$

$$\text{grad}\ (\Phi(x)) = Ax - b \tag{1.9}$$

Από τη σχέση (1.9) συμπεραίνουμε ότι η συνάρτηση $\Phi(x)$, επειδή η μήτρα A είναι θετικώς ορισμένη, λαμβάνει την ελαχίστη τιμή της για την τιμή του διανύσματος x, που επαληθεύει το σύστημα $Ax=b$. Εάν μεν η μήτρα A είναι μη ιδιάζουσα, τότε το διάνυσμα x είναι μοναδικό· αν όμως A είναι τάξης $r<n$, τότε υπάρχουν $k=n-r$ απειρίες διανυσμάτων x που ελαχιστοποιούν τη συνάρτηση (1.8).

2. ΝΕΥΡΟΜΟΡΦΙΚΟ ΔΙΚΤΥΟ ΓΙΑ ΓΡΑΜΜΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

2.1. Περιγραφή του δικτύου

Για την επίλυση ενός γραμμικού συστήματος με τη βοήθεια των νευρομορφικών δικτύων είναι αρκετό να σχεδιάσουμε ένα δίκτυο, το οποίο ελαχιστοποιεί την Ευκλείδεια απόσταση του διανυσματικού υπολοίπου $r=Ax-b$, σχέση (1.2), ή του ισοδυνάμου του:

$$r = Cx - d, \text{ όπου } C = A^tA,\ d = A^tb \tag{2.1}$$

Προτείνεται η χρήση του νευρομορφικού δικτύου του συνεχούς προτύπου Hopfield με τα εξής χαρακτηριστικά (Σχήμα 1)[1]:

$$\text{α)}\quad T_{ij} = T_{ji} = \begin{cases} -c_{ij}/c_{ii}, & i \neq j \\ 0 & , i = j \end{cases} \quad i, j = 1, 2 \cdots n \tag{2.2}$$

$$\text{β)}\quad z_i = d_i / c_{ii} \tag{2.3}$$

$$\text{γ)}\quad x_i = v_i = g_i(u_i) = u_i \tag{2.4}$$

$$\text{δ)}\quad E = -1/2 \sum_{j}^{n} \sum_{\neq i}^{n} T_{ij} v_i v_j - \sum_{i=1}^{n} z_i\, v_i - \sum_{i=1}^{n} 1/r_i \int_0^{v_i} g_i^{-1}(v)\, dv \tag{2.5}$$

όπου T_{ij} οι συνάψεις μεταξύ των νευρώνων του δικτύου, z_i οι εξωτερικές διεγέρσεις, u_i οι καταστάσεις των νευρώνων, $g_i(u_i)$ οι συναρτήσεις ενεργοποίησης, $v_i=x_i$ οι έξοδοι και E η συνάρτηση ενέργειας Lyapunov του δικτύου.

2.2. Λειτουργία του δικτύου

Όταν το Δίκτυο του Σχήματος 1 με τα χαρακτηριστικά της παραγράφου 2.1 σταθεροποιηθεί, οι έξοδοι των νευρώνων του είναι οι λύσεις του συστήματος Ax-b=0 ή του ισοδυνάμου του,

$$Cx - d = 0 \text{ ή } A^tAx - A^tb = 0 \tag{2.6}$$

Για την αιτιολόγηση του ισχυρισμού αυτού αποδεικνύουμε το παρακάτω θεώρημα:

Θεώρημα 2.2.1[7]

Η συνάρτηση Lyapunov (2.5) του δικτύου του Σχήματος 1 ελαχιστοποιείται για τις τιμές του x, που επαληθεύουν τα συστήματα (2.6).

Απόδειξη

Η συνάρτηση (2.5) μπορεί να γραφεί:

$$E = -1/2 \sum_{j \neq i}^{n} \sum_{i}^{n} T_{ij}\, x_i\, x_j - \sum_{i=1}^{n} z_i\, x_i - \sum_{i=1}^{n} 1/r_i \int_0^{x_i} g_i^{-1}(x)\, dx$$

με $r_i = 1$, $g_i^{-1}(x_i) = x_i$ $i = 1,2,3 \ldots n$. Τότε

$$E = 1/2 \sum_{i \neq j}^{n} \sum^{n} (c_{ij}/c_{ii})\, x_i\, x_j \sum_{i=1}^{n} (d_i/c_{ii})\, x_i + 1/2 \sum_{i=1}^{n} x_i^2, \text{ ή}$$

$$E = 1/2 \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} (c_{ij}/c_{ii})\, x_i\, x_j - \sum_{i=1}^{n} (d_i/c_{ii})\, x_i \quad \text{και τελικά}$$

$$E = 1/2\, x^t Cx - x^t d \tag{2.7}$$

Εάν λάβουμε το grad(E), ευρίσκουμε:

$$\mathrm{grad}(E) = Cx - d \tag{2.8}$$

αφού η μήτρα C είναι συμμετρική. Εάν δεχθούμε ότι η μήτρα C είναι και θετικώς ορισμένη (περιπτώσεις 1.1 (υπερκαθορισμένο) και 1.2 (τετραγωνικό)), τότε η (2.7) λαμβάνει την ελαχίστη της τιμή για τις τιμές του x που επαληθεύουν την εξίσωση (2.6), όπως δείχθηκε στο θεώρημα 1.3.4. Έτσι, όταν το δίκτυο σταθεροποιηθεί, οπότε και η συνάρτηση ενέργειας θα έχει λάβει την ελάχιστη τιμή της, οι έξοδοι του δικτύου xi θα είναι κατά την έννοια των ελαχίστων τετραγώνων οι λύσεις του συστήματος (1.1), στις περιπτώσεις 1.1 και 1.2.

Για την περίπτωση των Αόριστων Συστημάτων 1.3 (αόριστο) η σχέση (2.7) δεν δίδει σαφή απάντηση, διότι η μήτρα είναι συμμετρική· δεν είναι όμως θετικώς ορισμένη, για ν' αποφανθούμε με βεβαιότητα ότι η συνάρτηση E έχει ελάχιστο για τις τιμές που επαληθεύουν την (2.6). Σχετικό είναι το παρακάτω θεώρημα που εξασφαλίζει τη σύγκλιση του συνεχούς προτύπου του Hopfield, χωρίς η υπόθεση της θετικά ορισμένης μήτρας να είναι απαραίτητη.

Θεώρημα 2.2.2[10]

Υποθέσεις

α) $$T_{ij} = T_{ji} = \begin{cases} -c_{ij}/c_{ii}, & i \neq j \\ 0 & , i = j \end{cases} \quad i, j = 1, 2 \dots n \tag{2.9}$$

β) $$z_i = d_i / c_{ii} \tag{2.10}$$

γ) $$x_i = v_i = g_i(u_i) = u_i \tag{2.11}$$

δ) $$r_i = 1 \quad i = 1, 2, \dots, n \tag{2.12}$$

ε) $$E = -1/2 \sum_{j}^{n} \sum_{\neq i}^{n} T_{ij} v_i v_j - \sum_{i=1}^{n} z_i v_i - \sum_{i=1}^{n} 1/r_i \int_0^{v_i} g_i^{-1}(v)\, dv \tag{2.13}$$

Συμπέρασμα

α) $dE/dt \leq 0$

β) v_i σταθερό, $i=1,2,\dots,n$

Απόδειξη

Από την υπόθεση α) μετά τις αντικαταστάσεις ευρίσκουμε:

$$E = 1/2 \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} c_{ij}/c_{ii} v_j v_i - \sum_{i=1}^{n} z_i v_i, \text{ ή}$$

$$\partial E / \partial v_i = \sum_{i=1}^{n} c_{ij}/c_{ii} v_j - z_i \tag{2.14}$$

Η καταστατική εξίσωση του δικτύου μας δίδει:

$$d u_i / dt = -u_i / r_i - \sum_{i \neq j}^{n} -c_{ij}/c_{ii} v_i + z_i, \text{ ή}$$

$$d u_i / dt = - \sum_{i=1}^{n} c_{ij}/c_{ii} v_i + z_i \tag{2.15}$$

Από τη σύγκριση των (2.14) και (2.15) βρίσκουμε ότι

$d u_i / dt = -\partial E / \partial v_i$, και τότε

$$dE/dt = \sum_{i=1}^{n} \partial E / \partial v_i dv_i / dt = - \sum_{i=1}^{n} du_i / dt \, dv_i / dt = - \sum_{i=1}^{n} (dv_i / dt)^2, \text{ ή}$$

$$dE/dt \leq 0 \tag{2.16}$$

και επειδή η E είναι φραγμένη, συνεπάγεται ότι υπάρχει ελάχιστο το οποίο προσδιορίζεται από την εξίσωση

$dE/dt = 0$

και άρα v_i σταθεροποιείται.

Έτσι οι εξισώσεις (2.16) δείχνουν ότι το δίκτυο, αφού κινηθεί διαδοχικά σε καταστάσεις με συνεχώς ελαττούμενη ενέργεια, τελικά θα παραμείνει σε ένα από τα ελάχιστα της συνάρτησης ενέργειας.

Οι συνέπειες του θεωρήματος αυτού για την επίλυση των αορίστων γραμμικών συστημάτων είναι προφανείς. Έτσι για τη λύση του συστήματος (2.6), στην περίπτωση που αυτό είναι αόριστο, θα χρησιμοποιήσουμε το αυτό δίκτυο, όπως και στις άλλες δύο περιπτώσεις, αφού η σύγκλιση είναι και τώρα εξασφαλισμένη.

3. ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗ ΛΕΙΤΟΥΡΓΙΑΣ ΝΕΥΡΟΜΟΡΦΙΚΩΝ ΔΙΚΤΥΩΝ

Η προσομοίωση αναπτύχθηκε σε γλώσσα Pascal. Για τη δημιουργία του πίνακα A και του διανύσματος b, του συστήματος Ax=b, χρησιμοποιήθηκε μια γεννήτρια παραγωγής τυχαίων αριθμών. Εκτός από το δίκτυο, για τον υπολογισμό της λύσης του συστήματος κανονικών εξισώσεων (δίκτυο Atx) δημιουργήθηκαν και δύο πρόσθετα δίκτυα: το δίκτυο Atb, για τον υπολογισμό του διανύσματος A^tb, και το δίκτυο AtA, για τον υπολογισμό της μήτρας A^tA, με σκοπό την τροφοδότηση του δικτύου Atx με τα κατάλληλα δεδομένα εισόδου.

3.1. Περιγραφή του δικτύου Atb

Το δίκτυο βασίζεται σε μία συνδεσμική αρχιτεκτονική για τον πολλαπλασιασμό μιας mxn μήτρας A επί ένα nx1 διάνυσμα b, με την πρόσθετη περιπλοκότητα ότι η μήτρα αναστρέφεται κατά τον πολλαπλασιασμό, όπως φαίνεται στο Σχήμα 2. Χρησιμοποιήθηκε ένας μονοδιάστατος πίνακας με m+n νευρώνες, από τους οποίους m είναι νευρώνες (απλοί κόμβοι) εισόδου και n νευρώνες εξόδου. Είσοδοι στους m κόμβους είναι τα m στοιχεία του διανύσματος b. Για τους n νευρώνες εξόδου, οι είσοδοι είναι μηδέν:

```
for i : = 1 to m do
  v[i] : = b[i];
for i : = m+1 to m+n do
  v[i] : = 0;
```

Οι συνάψεις των κόμβων ορίζονται ως εξής: Κάθε κόμβος εισόδου συνδέεται με μη μηδενικές συνάψεις με n νευρώνες εξόδου, έτσι ώστε οι σημαντικές συνάψεις ενός κόμβου εισόδου προς τους νευρώνες αποτελούνται από τα στοιχεία μιας γραμμής της μήτρας A. Έτσι κάθε νευρώνας εξόδου δέχεται ως συνάψεις τα στοιχεία μιας στήλης της μήτρας A. Αυτή η σύνδεση δίνεται με τον παρακάτω κώδικα:

```
for i : = 1 to m+n do
  for j : = 1 to m+n do
    t[i, j] : = 0;
for i : = 1 to m do
  for j : = 1 to n do
    t[i, m+j] : = a[i,j];
```

Ως συνάρτηση ενεργοποίησης χρησιμοποιείται η συνάρτηση λογικής στάθμης με κατώφλι ίσο με το μηδέν. Το δίκτυο είναι μιας κατεύθυνσης και όταν σταθεροποιηθεί παράγει στους νευρώνες εξόδου τα στοιχεία του διανύσματος $A^t b$:

```
for i : = m+1 to m+n do
begin
  u[i] : = 0;
  for j : = 1 to m do
    u[i] : = u[i] + t[j, i] * v[j];
end;
```

3.2. Περιγραφή του δικτύου AtA

Πρόκειται για μία επέκταση της συνδεσμικής διάταξης πολλαπλασιασμού μήτρας επί διάνυσμα σε διάταξη πολλαπλασισμού δύο μητρών, με την πρόσθετη περιπλοκότητα ότι η μία μήτρα είναι η ανάστροφη της άλλης, όπως φαίνεται στο Σχήμα 3. Χρησιμοποιήθηκε ένας μονοδιάστατος πίνακας με nx(m+n) νευρώνες, από τους οποίους nxm είναι κόμβοι εισόδου και nxn νευρώνες εξόδου. Είσοδοι είναι τα στοιχεία της μήτρας A με χρήση συνάρτησης απεικόνισης κατά στήλη του διδιάστατου (mxn) πίνακα A στις πρώτες nxm θέσεις του μονοδιάστατου πίνακα. Για τους nxn κόμβους εξόδου οι αρχικές είσοδοι είναι μηδέν:

```
for i: = 1 to m*(m+n) do
   v[i]: = 0;
for x: = 1 to n do
  for i: = 1 to m do
   v[(x-1) * (m+n) + i]: = a[i, x];
```

Οι συνάψεις των mxn κόμβων εισόδου με τους nxn νευρώνες εξόδου ορίζονται όπως παρακάτω: Κάθε ένας από τους mxn κόμβος εισόδου συνδέεται με nxn νευρώνες εξόδου, έτσι ώστε οι συνάψεις από κάθε κόμβο εισόδου προς τους νευρώνες εξόδου αποτελούνται από n αντίγραφα των στοιχείων μιας γραμμής της μήτρας A. Έτσι κάθε νευρώνας εξόδου δέχεται ως συνάψεις τα στοιχεία μιας στήλης της μήτρας A και κάθε στήλη της μήτρας A που εφαρμόζεται σαν είσοδος ουσιαστικά πολλαπλασιάζεται με τον εαυτό της:

```
for x: = 1 to n do
  for i: = 1 to m+n do
    for y: = 1 to n do
      for j: = 1 to m+n do
        t[ ( (x-1) * (m+n) +i), ( (y-1) * (m+n) +j) ]: =0;
for x: = 1 to n do
  for i: = 1 to m do
    for y: = 1 to n do
      for j: = m+1 to m+n do
        if (x=y) then
          t[ ( (x-1) * (m+n) +i), ( (y-1) * (m+n) +j) ]: = a[i, j-m];
```

Ως συνάρτηση ενεργοποίησης χρησιμοποιείται η συνάρτηση λογικής στάθμης με κατώφλι ίσο με μηδέν. Το δίκτυο είναι μιας κατεύθυνσης και όταν σταθεροποιηθεί παράγει στους νευρώνες εξόδου τα στοιχεία της μήτρας A^tA:

```
for x: = 1 to n do
 for i: = m+1 to m+n do
 begin
  u[ (x-1) * (m+n) +i]: =0;
  for y: =1 to n do
   for j: = 1 to m+n do
    u[ (x-1) * (m+n) +i]: = u[(x-1) * (m+n) +i] +
    t[ ( (y-1) * (m+n) +j), ( (x-1) * (m+n)+i)] * v [(y-1) * (m+n) +j];
end;
```

3.3. Περιγραφή του δικτύου Atx

Πρόκειται για το νευρομορφικό δίκτυο που περιγράφεται στο Σχήμα 1. Χρησιμοποιήθηκε ένας μονοδιάστατος πίνακας με n νευρώνες, εισόδου και εξόδου, στους οποίους παίρνουμε το διάνυσμα των λύσεων του συστήματος κανονικών εξισώσεων. Οι είσοδοι και ταυτόχρονα οι εξωτερικές διεγέρσεις στους κόμβους ορίζονται ως:

```
for i : = 1 to n do
begin
 v[i] : = d[i] / c[i, i];
 z[i] : = v[i];
end;
```

Όπου d το διάνυσμα A^tb και C ο πίνακας A^tA, δηλαδή οι έξοδοι των δικτύων Atb και AtA αντίστοιχα. Οι συνάψεις ορίζονται:

```
for i : = 1 to n do
 for j: =1 to n do
  if i <>j then
   t [i, j]: = -c[j, i] / c[j, j]
  else
   t[i, j]: = 0;
```

Ως συνάρτηση ενεργοποίησης του δικτύου χρησιμοποιείται η συνάρτηση λογικής στάθμης με κατώφλι ίσο με μηδέν. Το δίκτυο είναι Hopfield ανατροφοδοτούμενο και όταν σταθεροποιηθεί, με την επίλυση του συστήματος διαφορικών εξισώσεων (2.15), μας δίνει στους νευρώνες εξόδου τα στοιχεία του διανύσματος x. Η επίλυση του συστήματος κανονικών διαφορικών εξισώσεων επιτυγχάνεται με τη μέθοδο Runge Kutta 4ης τάξης (πίνακας u[4, n]).

```
repeat
 for i : =1 to n do
 begin
  uk[1,i] : = -u[i] +z[i];
  for j : =1 to n do
   uk[1, i] : uk[1, i] + (t[j, i] * u[j]);
 end;
 for i : = 1 to n do
 begin
  uk[2, i] : = - (u[i] + h * uk[1, i] /2) + z[i];
  for j : =1 to n do
   uk [2, i] : uk[2, i] + (t[j, i]) * u[j]) + h * uk [1,j] / 2;
 end;
 for i : =1 to n do
 begin
  uk[3, i] : =-(u[i] + h * uk [2, i] / 2) + z[i];
  for j: =1 to n do
   uk[3,i] : = uk[3,i] +(t[j, i] * (u[j]) + h * uk[2, j] / 2);
 end;
 for i : = 1 to n do
 begin
  uk [4, i] : = -(u[i] + h * uk[3, i]) + z[i];
  for j : = 1 to n do
   uk[4, i] : = uk[4, i] + (t[j, i] * u[j]) + h * uk [3, j]);
 end;
 for i : = 1 to n do
  u[i] : =u[i] + h * (uk[1, i] + 2 * uk[2, i] +2 * uk[3,i] +uk[4, i]) / 6;
until covergence;
```

3.4. Χώρος λύσεων αορίστου συστήματος

Για την εύρεση του χώρου των λύσεων του Αορίστου Συστήματος, βρίσκουμε την ελάσσονα ορίζουσα AtA1 που είναι διάφορη του μηδενός και λύνουμε τα k=n-m συστήματα. Για το σκοπό αυτό χρησιμοποιούμε k δίκτυα της περίπτωσης 3.3, τα οποία δίνουν k λύσεις των ομογενών συστημάτων. Κατόπιν σχηματίζουμε τις m πλήρεις λύσεις των ομογενών συστημάτων και, στη συνέχεια, παίρνουμε το γραμμικό συνδυασμό των k λύσεων των ομογενών συστημάτων τις οποίες προσθέτουμε στην αρχική λύση, η οποία είναι και λύση του αρχικού συστήματος εξισώσεων, παίρνοντας έτσι τις άπειρες λύσεις για τις διάφορες τιμές των c_i, με $i = 1, 2, ..., k$.

4. ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Το άρθρο αυτό πραγματεύθηκε την επίλυση συστημάτων γραμμικών εξισώσεων με τη βοήθεια των νευρομορφικών δικτύων. Ένα γενικό γραμμικό σύστημα μετασχηματίζεται σε σύστημα κανονικών εξισώσεων, το οποίο επιλύεται μέσω της ελαχιστοποίησης της συνάρτησης ενέργειας (συνάρτηση Lyapunov) ενός νευρομορφικού δικτύου τύπου Hopfield. Δηλαδή το πρόβλημα της επίλυσης συστήματος γραμμικών εξισώσεων μετατρέπεται σε ένα πρόβλημα αριστοποίησης, οι συντελεστές του οποίου συνδέονται με τις παραμέτρους του νευρομορφικού δικτύου.

Η μέθοδος αυτή της αντιστοίχησης ενός προβλήματος αριστοποίησης με τη λειτουργία ενός νευρομορφικού δικτύου έχει χρησιμοποιηθεί με επιτυχία σε αρκετούς τομείς της επιχειρησιακής έρευνας, συνδυαστικής βελτιστοποίησης κλπ.[10,11]. Εργασίες σχετικές με την επίλυση συστημάτων γραμμικών εξισώσεων έχουν αναφερθεί[4,8]. Η εργασία 4 αναφέρεται στην επίλυση υπερκαθορισμένων και τετραγωνικών συστημάτων με τη μέθοδο του Huang. Η εργασία 8 αναφέρεται στην αντιστροφή μόνον τετραγωνικών μητρών. Στην παρούσα εργασία ιδιαίτερο ενδιαφέρον παρουσιάζει η γενικευμένη χρήση του ίδιου νευρομορφικού δικτύου για όλους τους τύπους γραμμικών συστημάτων, κυρίως με την αντιμετώπιση της επίλυσης των αορίστων συστημάτων.

Η λειτουργία του δικτύου προσομοιώνεται σε γλώσσα Pascal με την επαναληπτική επίλυση των αντιστοίχων συστημάτων κανονικών διαφορικών εξισώσεων Runge Kutta 4ης τάξης. Επίσης παρουσιάζονται σύντομα δύο συνδεσμικές διατάξεις, ή μονοκατευθυντικά νευρομορφικά δίκτυα ενός περάσματος, για τον μετασχηματισμό γενικών γραμμικών συστημάτων σε συστήματα κανονικών εξισώσεων. Τα δίκτυα αυτά βασίζονται στον πολλαπλασιασμό μήτρας επί διάνυσμα ή στον πολλαπλασιασμό δύο μητρών.

Ενδιαφέρον παρουσιάζει η επέκταση της εργασίας, έτσι ώστε να συμπεριληφθεί και ο υπολογισμός του γενικευμένου αντιστρόφου μιας μήτρας με μεθόδους αριστοποίησης και χρήση νευρομορφικών δικτύων. Ακόμη, η υλοποίηση των αναλογικών ουσιαστικά δικτύων με ψηφιακές τεχνικές εισάγει προβλήματα όπως η προσέγγιση των μη γραμμικών όρων στη συνάρτηση ενέργειας των δικτύων καθώς επίσης και στον τύπο του παραλληλισμού που θα χρησιμοποιηθεί, στην ανατροφοδότηση και ενημέρωση των νευρώνων[9]. Το γεγονός ότι πρόκειται για επίλυση γραμμικών συστημάτων βοηθά στην εφαρμογή της θεωρίας των παράλληλων επαναληπτικών αριθμητικών μεθόδων στα νευρομορφικά δίκτυα.

5. ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

1. Αδαμόπουλος Μ., *Νευρομορφικά δίκτυα: αλγόριθμοι και εφαρμογές*, Διδακτορική Διατριβή, Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης, 1991.

2. Dahlquist G., Bjorg A., *Numerical methods*, Prentice Hall, 1974.

3. Demidovitch B. P., Maron I. A., *Computational mathematics*, MIR Publishers, 1976.

4. Forbes A. B., Mansfield A. J., "Neural implementation of a method for solving systems of linear equations", *National Physical Laboratory,* DITC 155/89, 1989.

5. Froberg C. E., *Introduction to numerical analysis*, Addison Wesley, 1962.

6. Golub G. H., Van Loan C. F., *Matrix computations*, Johns Hopkins Press, 1983.

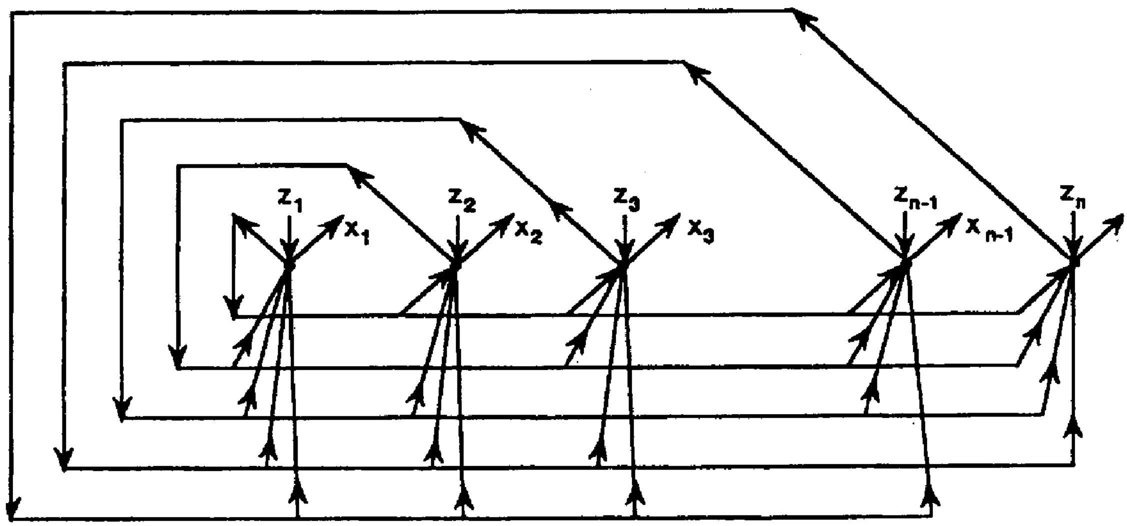
7. Hopfield J., Tank D., "Neural computation of decisions in optimization problems", *Biol. Cybernetics*, 52, 1985.

8. Jang J., Lee S., Shin S., "An optimization network for matrix inversion", in *Proc. IEEE Conf. on Neural Information Processing Systems*, 1987.

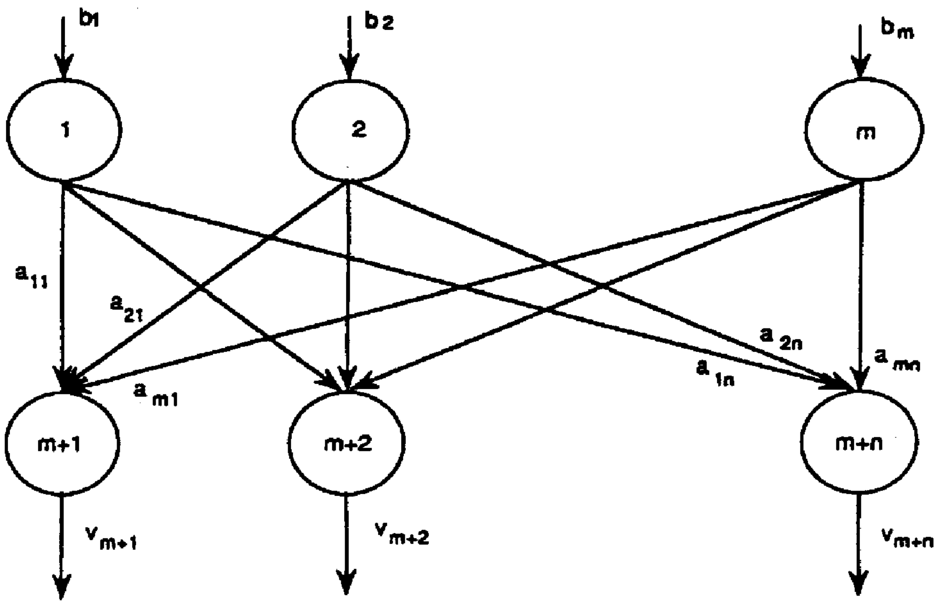
9. Margaritis K., Adamopoulos M., Tsouros K., Evans D. J., "Systolic and optical implementation of neural networks for searching sets of properties", *Proc. "Parallel Computing '91"*, Elsevier Science Publ. 1992.

10. Pao Y. H., *Adaptive pattern recognition and neural networks*, Addison Wesley, 1989.

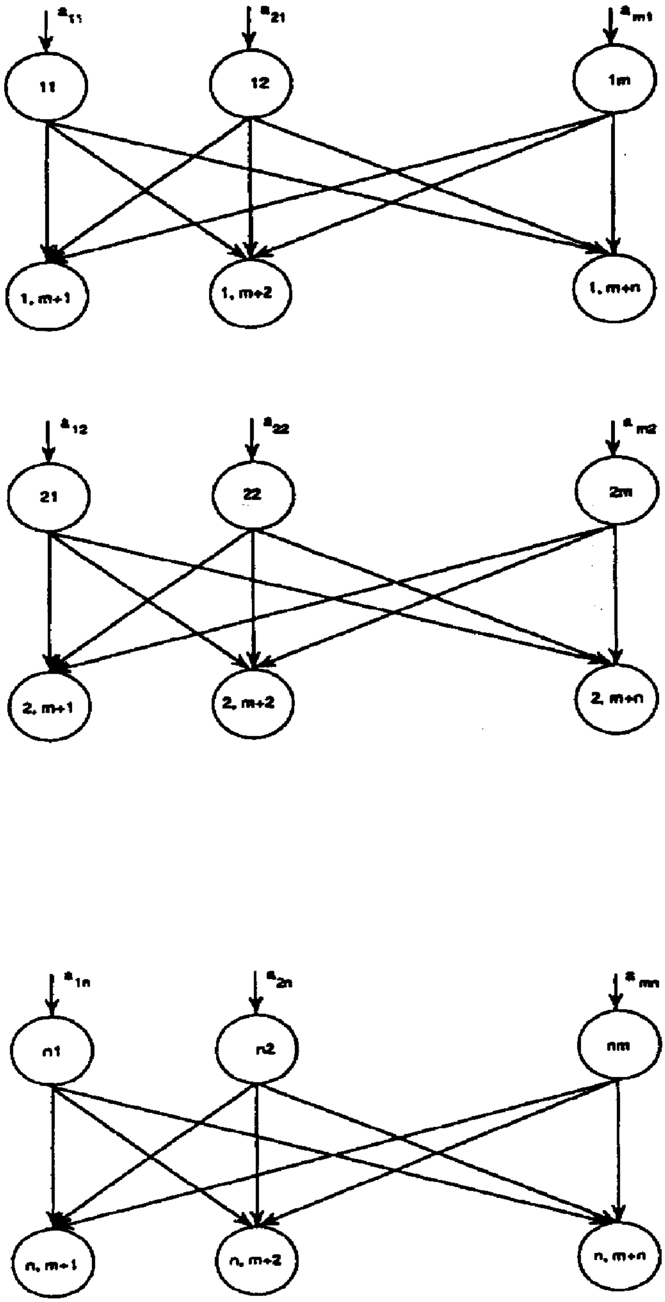
11. Simpson P. K., *Artificial neural systems*, Pergamon Press, 1990.



Σχήμα 1



Σχήμα 2


a11
a21
am1
11
12
1m
1, m+1
1, m+2
1, m+n
a12
a22
am2
21
22
2m
2, m+1
2, m+2
2, m+n
a1n
a2n
amn
n1
n2
nm
n, m+1
n, m+2
n, m+n

Σχήμα 3