

ΔΗΜΗΤΡΗ ΠΑΠΑΝΑΣΤΑΣΙΟΥ

**Η ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ ΤΟΥ ΥΠΟΔΕΙΓΜΑΤΟΣ AR(1) ΜΕ ΣΦΑΛΜΑΤΑ
ΠΟΥ ΑΚΟΛΟΥΘΟΥΝ ΤΗΝ ΚΑΤΑΝΟΜΗ LAPLACE**

ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ

Περίληψη

1. Εισαγωγή
 2. Το AR(1) με Laplace σφάλματα
 3. Εκτίμηση παραμέτρων για το AR(1)
 4. Μελέτη προσομοίωσης
 5. Ένα αριθμητικό παράδειγμα
 6. Συμπεράσματα
- Βιβλιογραφία

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Στάσιμα γραμμικά υποδείγματα χρονοσειρών, που οδηγούνται από μη-κανονικά σφάλματα, μπορούν να έχουν περιθωριακή κατανομή, που να διαφέρει από την κανονική. Εδώ εξετάζεται κυρίως η περίπτωση του AR(1), που τα σφάλματά του ακολουθούν την κατανομή Laplace. Συμπεραίνεται πως για τιμές της παραμέτρου αυτοπαλινδρομήσεως κοντά στο μηδέν, η κατανομή των παρατηρήσεων είναι λεπτόκυρτη. Σε μελέτη προσομοίωσης διερευνούνται η συμπεριφορά των ροπών τετάρτης τάξεως, οι ιδιότητες των εκτιμητών Ελαχίστων Τετραγώνων και Μεγίστης Πιθανοφάνειας, καθώς και η προβλεπτική ικανότητα του υποδείγματος. Τέλος, το υπόδειγμα εκτιμάται για μια γνωστή χρονοσειρά.

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Δείγματα χρονοσειρών από πραγματικές περιπτώσεις δείχνουν πως η συνηθισμένη υπόθεση ότι η περιθωριακή κατανομή μιας στάσιμης σειράς ακολουθεί την κανονική συχνά δεν ανταποκρίνεται στην πραγματικότητα. Η εφαρμογή ενός μετασχηματισμού Box-Cox δεν είναι πάντα αποτελεσματική στην προσπάθεια “κανονικοποίησης” της σειράς (βλ. Nelson και Granger, 1979).

Για να περιγράψουμε τέτοιες σειρές, θα μπορούσαμε να χρησιμοποιήσουμε μη-γραμμικά υποδείγματα (π.χ. βλέπε τη σχετική βιβλιογραφία του Tjostheim, 1986) ή υποδείγματα ανάλογα με τα γνωστά από την κλασική παλινδρόμηση γενικευμένα γραμμικά υποδείγματα (βλ. Li, 1991, West κ.ά., 1985) ή τέλος υποδείγματα με μη-κανονικά σφάλματα (Li και McLeod, 1988). Τα υποδείγματα με τα οποία θα ασχοληθούμε στη συνέχεια ανήκουν σε αυτή την τελευταία κατηγορία.

Κάτω από ορισμένες προϋποθέσεις, η στάσιμη περιθωριακή κατανομή ενός γραμμικού υποδείγματος, που οδηγείται από μη-κανονικά σφάλματα, συγκλίνει στην κανονική (βλ. Lusk και Wright, 1982, Mallows, 1967). Οι προϋποθέσεις αυτές συνήθως πληρούνται, όταν έχουμε συμμετρικές κατανομές. Παρ' όλα αυτά, στη συνέχεια θα δούμε ότι ακόμη και για συμμετρικές κατανομές, όπως η Laplace, η σύγκλιση στην κανονική εξαρτάται ιδιαίτερα από τις τιμές των παραμέτρων του υποδείγματος.

Κύρια θα εξετάσουμε την περίπτωση του AR(1) με Laplace σφάλματα, όπου είναι ευκολότερο να δείξουμε τα παραπάνω. Στην ενότητα 2 προσδιορίζουμε τις ροπές τετάρτης τάξεως για τη στάσιμη κατανομή και τις κατανομές των σφαλμάτων

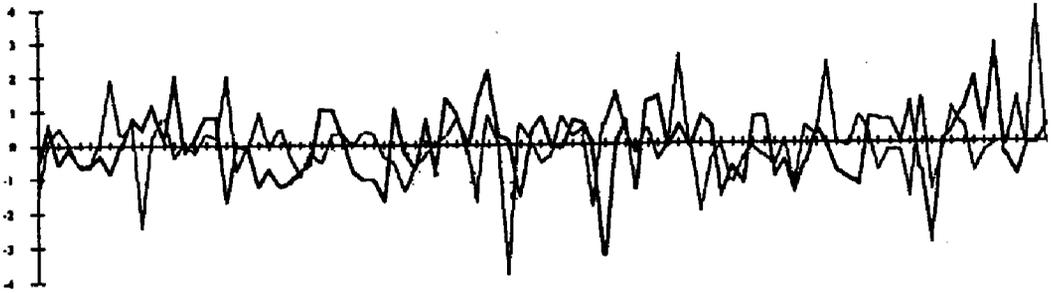
πρόβλεψης. Στην ενότητα 3 εξετάζουμε γενικότερα την εκτίμηση των παραμέτρων ενός AR(p) και στην ενότητα 4 παρουσιάζουμε τα αποτελέσματα της μελέτης προσομοίωσης. Στις τελευταίες δύο ενότητες δίνουμε ένα αριθμητικό παράδειγμα και σχολιάζουμε τα συμπεράσματά μας εντοπίζοντας τα σημεία για παραπέρα διερεύνηση.

2. TO AR(1) ΜΕ LAPLACE ΣΦΑΛΜΑΤΑ

Έστω ότι οι παρατηρήσεις x_t προέρχονται από το υπόδειγμα

$$x_t = \alpha x_{t-1} + \varepsilon_t, \quad (2.1)$$

όπου $|\alpha| < 1$, $\varepsilon_t \sim \text{La}(0, \phi)$ και τα ε_t ανεξάρτητα μεταξύ τους. Η κατανομή των σφαλμάτων είναι λεπτόκυρτη με $\beta_2 = 6$ και αυτό το χαρακτηριστικό μεταφέρεται και στην κατανομή των x_t . Αυτό σημαίνει ότι το υπόδειγμα μπορεί να εξηγήσει καλύτερα περιπτώσεις που μεμονωμένες τιμές αποκλίνουν περισσότερο από τρεις τυπικές αποκλίσεις από τον μέσο. Στο Σχήμα 1 δίνεται η γραφική παράσταση δειγμάτων 100 παρατηρήσεων, που έχουν δημιουργηθεί από το υπόδειγμα $x_t = 0.05x_{t-1} + \varepsilon_t$. Με συνεχή γραμμή παρίστανται οι παρατηρήσεις όταν το $\varepsilon_t \sim N(0, 1)$. Με στικτή γραμμή όταν $\varepsilon_t \sim \text{La}(0, 1/\sqrt{2})$. Παρατηρούμε ότι ενώ η πλειοψηφία των παρατηρήσεων της σειράς με Laplace σφάλματα είναι φανερά πιο συγκεντρωμένες γύρω από τον μέσο τους απ' ό,τι οι αντίστοιχες από τα κανονικά, υπάρχουν δύο ακραίες τιμές, τις χρονικές στιγμές 45 και 95, που ξεπερνούν αυτές της κανονικής και κατ' απόλυτη τιμή είναι μεγαλύτερες του τρία.



Σχήμα 1

Δίνονται 100 προσομοιωμένες παρατηρήσεις από το υπόδειγμα $x_t = 0.05x_{t-1} + \varepsilon_t$. Με στικτή γραμμή παρίστανται οι τιμές που προέρχονται από Laplace σφάλματα με συνεχή, από κανονικά.

Είναι γνωστό (βλ. Brockwell και Davis, 1987, σ. 83), ότι για $|a| < 1$, και $\text{var}(x_t) < \infty$ το υπόδειγμα (2.1) είναι στάσιμο. Για απλά υποδείγματα, όπως το (2.1), είναι σχετικά εύκολο να εξετάσουμε τη στασιμότητα από τη σκοπιά των ροπών. Οι ροπές δευτέρας τάξεως είναι πάντα οι ίδιες, ανεξάρτητα από την κατανομή των σφαλμάτων. Προκειμένου να προσδιορίσουμε τις ροπές τετάρτης τάξεως, θα εισάγουμε τον συμβολισμό

$$\gamma(\tau_1, \tau_2, \tau_3) = E(x_{t-\tau_1} x_{t-\tau_2} x_{t-\tau_3}), \quad t > \tau_3 \geq \tau_2 \geq \tau_1 \geq 0.$$

Ανάλογα ορίζουμε τα $\gamma(\tau_1, \tau_2)$ και $\gamma(\tau)$. Για ένα AR(1), όπως το (2.1) με σφάλματα ε_t που έχουν $E(\varepsilon_t) = 0$, $E(\varepsilon_t^2) = \sigma^2$, $E(\varepsilon_t^3) = \sqrt{\beta_1} (\sigma^2)^{3/2}$ και $E(\varepsilon_t^4) = \beta_2 \sigma^4$, καταλήγουμε ότι

$$\gamma(\tau_1, \tau_2) = a^{2\tau_2 - \tau_1} \sqrt{\beta_1} (\sigma^2)^{3/2} (1 - a^3), \quad (2.2)$$

$$\begin{aligned} \gamma(\tau_1, \tau_2, \tau_3) = & a^{\tau_1} \sigma_x^4 \left[\frac{a^{\tau_3 - \tau_2 - 2(\tau_2 - \tau_1)}}{1 + a^2} \left[3(1 + a^2) + \right. \right. \\ & \left. \left. + (1 - a^2) a^{2(\tau_3 - \tau_2)} (\beta_2 - 3) \right] + a^{\tau_3 - \tau_2} (1 - a^{2(\tau_2 - \tau_1)}) \right] \end{aligned}$$

όπου $\sigma_x^2 = \text{var}(x_t) = \sigma^2 / (1 - a^2)$.

Εύκολα από τις παραπάνω σχέσεις καταλήγουμε ότι για σφάλματα Laplace, όταν δηλαδή $\beta_2=6$, ο συντελεστής κυρτότητας της κατανομής των x_t είναι $6/(1+a^2)$. Για a πολύ μικρό, που σημαίνει ότι τα x_t είναι σχεδόν ασυσχέτιστα, η κατανομή των x_t είναι πλησιέστερα στη Laplace παρά στην κανονική. Το αντίθετο συμβαίνει όταν η παράμετρος a είναι κοντά στο όριο στασιμότητας, δηλαδή $a=1$.

Η συνδιακύμανση της σειράς των τετραγώνων των x_t είναι $\text{cov}(x_t^2, x_{t-\tau}^2) = E(x_t^2, x_{t-\tau}^2) - \sigma_x^4 = \gamma(0, \tau, \tau) - \sigma_x^4, t > \tau \geq 0$.

Συμβολίζουμε με R_τ τον λόγο

$$R_\tau = \text{cov}(x_t^2, x_{t-\tau}^2) / \gamma(\tau)^2, t > \tau \geq 0. \quad (2.3)$$

Από τις (2.2) και (2.3) καταλήγουμε πως αν τα $\varepsilon_t \sim N(0, \sigma^2)$, τότε $R_\tau=2$. Αν $\varepsilon_t \sim \text{La}(0, \phi)$, τότε $R_\tau = (5 - a^2) / (1 + a^2)$, και $2 < R_\tau < 5$. Η σχέση (2.3), όπως και ο συντελεστής κύρτωσης, θα μπορούσε να χρησιμεύσει ως κριτήριο αναγνώρισης για την περίπτωση που οι παρατηρήσεις προέρχονται από υπόδειγμα με κανονικά σφάλματα ή όχι. Στο θέμα αυτό θα επανέλθουμε στην τελευταία ενότητα.

Στη συνέχεια θα προσδιορίσουμε τις ροπές των κατανομών πρόβλεψης της (2.1). Έστω ότι έχουμε παρατηρήσεις μέχρι τη χρονική στιγμή N . Η γραμμική, ελαχίστου μέσου τετραγωνικού σφάλματος, πρόβλεψη τη στιγμή $N+\tau$ είναι $\hat{x}_\tau = a^\tau x_N$. Το σφάλμα πρόβλεψης e_τ είναι

$$e_\tau = x_{N+\tau} - \hat{x}_\tau = \sum_{i=0}^{\tau} a^i \varepsilon_{N+\tau-i}$$

Από τη ροπογεννήτρια συνάρτηση της (2.1), με τη συνηθισμένη διαδικασία, καταλήγουμε ότι η διακύμανση $\text{var}(e_\tau)$ και

η κύρτωση $kurt(e_\tau)$ του e_τ είναι

$$\text{var}(e_\tau) = \sigma^2 \frac{1 - a^{2\tau}}{1 - a^2}, \quad kurt(e_\tau) = 3 \left[1 + \frac{1 - a^2}{1 + a^2} \frac{1 + a^{2\tau}}{1 - a^{2\tau}} \right]$$

όπου $\sigma = \sqrt{2} \phi$. Για τ μεγάλα, καταλήγουμε στις ίδιες εκφράσεις με τη στάσιμη κατανομή. Επισημαίνουμε ότι με τον ίδιο τρόπο μπορούμε να προσδιορίσουμε εύκολα τα παραπάνω χαρακτηριστικά για οποιασδήποτε τάξης MA(q) με Laplace σφάλματα.

3. ΕΚΤΙΜΗΣΗ ΠΑΡΑΜΕΤΡΩΝ ΓΙΑ ΤΟ AR(1)

Η γενίκευση των παραπάνω για AR(p), ή ARMA (p,q) με $p, q > 1$, δεν είναι εύκολη (βλ. επίσης Davies κ.ά., 1980) και δεν θα το επιχειρήσουμε εδώ. Από την άλλη πλευρά, η εκτίμηση των παραμέτρων δεν παρουσιάζει ιδιαίτερη δυσκολία.

Έστω $X'_t = (x_t, \dots, x_{t-p+1})$ και $a' = (a_1, \dots, a_p)$ οι παράμετροι αυτοπαλινδρόμησης, για τις οποίες ισχύουν οι συνηθισμένες συνθήκες στασιμότητας. Έχοντας N παρατηρήσεις και θεωρώντας το X'_p σταθερό και γνωστό, το πρόβλημα προσδιορισμού εκτιμητών Δεσμευμένης Μέγιστης Πιθανοφάνειας (ΔΜΠ) ανάγεται στο γνωστό από την κλασική παλινδρόμηση πρόβλημα Ελαχιστοποίησης του Αθροίσματος Απολύτων Αποκλίσεων (MAD ή MINMAD ή L_1 -εκτιμητές). Πιο συγκεκριμένα, ο εκτιμητής ΔΜΠ για το $\hat{\phi}$ είναι $\hat{\phi} = \sum |e_t| / (N - p)$, όπου $e_t = x_t - X'_{t-1} \underline{a}_p$, $t = p+1, \dots, N$ και επομένως $\hat{\sigma}^2 = 2 \hat{\phi}^2$. Εκτιμητές ΔΜΠ για το \underline{a}_p επιτυγχάνονται ελαχιστοποιώντας την (3.1)

$$L(\underline{a}_p) = \sum |\varepsilon_t|, \quad i = p + 1, \dots, N. \quad (3.1)$$

Η ελαχιστοποίηση της (3.1) είναι βασικά ένα πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού και ειδικοί για την περίπτωση αλγόριθμοι δίνονται στους Arthanari και Dodge (1981, σ. 32). Τους εκτιμητές, που προκύπτουν με αυτό τον τρόπο, θα τους αποκαλούμε στη συνέχεια εκτιμητές MAD. Οι ιδιότητες των MAD-εκτιμητών για την κλασική παλινδρόμηση παρουσιάζονται συνοπτικά στον Harvey (1977). Οι Dunsmuir και Spencer (1991) δίνουν τα ανάλογα αποτελέσματα για ARMA(p,q) υποδείγματα, ενώ ο Weiss (1991) ασχολείται με ένα γενικότερο δυναμικό υπόδειγμα.

Ξαναγράφουμε την (3.1) ως

$$L(\underline{a}_p) = \sum |\varepsilon_t| = \sum \frac{1}{w_t} \varepsilon_t^2, \quad w_t = |\varepsilon_t|, \quad t = p + 1, \dots, N.$$

Σε αυτή τη μορφή, η (3.1) μπορεί να ελαχιστοποιηθεί ως προς \underline{a}_p με μια επαναληπτική διαδικασία και τους εκτιμητές, που θα προκύψουν με αυτό τον τρόπο, θα τους ονομάσουμε Επανασταθμιζόμενα Ελάχιστα Τετράγωνα (ΕΕΤ). Τέλος, εκτιμητές Ελαχίστων Τετραγώνων (ΕΤ) θα ονομάσουμε αυτούς που προκύπτουν απλά από την ελαχιστοποίηση του αθροίσματος των τετραγώνων των σφαλμάτων. Στη μελέτη προσομοίωσης θα ελεγχθεί η αποτελεσματικότητα των παραπάνω εκτιμητών.

4. ΜΕΛΕΤΗ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗΣ

Η μελέτη προσομοίωσης επικεντρώθηκε κυρίως σε τρία σημεία. Πρώτον, στη διερεύνηση της δυνατότητας να χρησι-

μποποιηθεί η σχέση (2.3), για να αποφανθούμε αν το AR(1) έχει κανονικά σφάλματα ή όχι. Δεύτερον, εξετάσαμε τη συμπεριφορά σε μικρά δείγματα των εκτιμητών ET, MAD και EET. Τρίτον, εξετάσαμε την ικανότητα του σχήματος AR(1) για προβλέψεις, όπου το α εκτιμήθηκε με κάθε μία από τις παραπάνω μεθόδους.

Από τη σχέση (2.3) είναι φανερό ότι για $\gamma(\tau) \rightarrow 0$ θα έχουμε αριθμητικά προβλήματα. Γι' αυτό τον λόγο, στη μελέτη προσομοίωσης εξετάσαμε την ισοδύναμη έκφραση $\ln |R_\tau| = \ln |\cos(x_t^2, x_{t-\tau}^2)| - \ln \gamma(\tau)^2$. Για διαφορετικά μεγέθη δείγματος και διαφορετικές τιμές του α δημιουργήσαμε 500 σειρές από το AR(1). Επαναλάβαμε το πείραμα με Laplace και κανονικά σφάλματα. Και στις δύο περιπτώσεις, όπως και στα επόμενα πειράματα, τα σφάλματα είχαν την ίδια διακύμανση, ίση με ένα. Στον Πίνακα 4.1 δίνουμε τους μέσους για το $\ln |R_1|$ υπολογισμένους από 500 σειρές για διαφορετικά N και α .

ΠΙΝΑΚΑΣ 4.1

Η μέση τιμή του $\ln |R_1|$ από 500 επαναλήψεις για διαφορετικά α και N . Στην πρώτη γραμμή δίνουμε το αποτέλεσμα για Laplace, στη δεύτερη για κανονικά σφάλματα.

N	α	0.10	0.30	0.50	0.80	0.95
100		2.18	0.51	0.57	0.47	0.62
		3.08	0.60	0.31	0.42	0.26
200		2.18	0.72	0.89	0.75	0.80
		2.57	0.37	0.49	0.54	0.41
400		2.29	0.96	1.09	0.85	0.75
		2.06	0.42	0.61	0.62	0.52

Παρατηρούμε ότι οι μέσοι διαφέρουν από τις θεωρητικές τους τιμές, ακόμη και για $N = 400$. Τα αποτελέσματα είναι πολύ φτωχά για $|a| \rightarrow 0$, τιμές για τις οποίες μας ενδιαφέρει ιδιαίτερα ο υπολογισμός του $\ln |R_1|$. Η τυπική απόκλιση των εκτιμήσεων, που δεν δίνεται στον Πίνακα 4.1, μεγαλώνει για $|a| \rightarrow 0$, όπως επίσης και η κατανομή τους γίνεται λεπτόκυρτη και ασύμμετρη. Περίπου στα ίδια συμπεράσματα οδήγησε και ο υπολογισμός του $\ln |R_1|$ από μία μεγάλη προσομοιωμένη σειρά 10000 παρατηρήσεων. Ακόμη και εκεί, για $|a| < 0.3$ τα αποτελέσματα απείχαν πολύ από τα θεωρητικά. Για $|a| > 0.3$, οι δειγματικές τιμές του $\ln |R_1|$ πλησίαζαν τις θεωρητικές. Ως συμπέρασμα, θα καταλήγαμε πως το $\ln |R_1|$ δεν εκπληρεί τον σκοπό του.

Οι Πίνακες 4.2-4.4 δίνουν τα αποτελέσματα από τη σύγκριση των εκτιμητών ET, MAD και EET για διαφορετικές τιμές του a . Τα EET άρχιζαν τις επαναλήψεις με αρχική τιμή αυτή των ET. Όπως προηγουμένως, δημιουργήθηκαν διαδοχικά 300 σειρές με σφάλματα από τη Laplace και την κανονική. Στα αποτελέσματα που δίνονται στους πίνακες δεν ελήφθησαν υπόψη οι περιπτώσεις που οι υπολογισμοί κατέληγαν σε a ίσο ή μεγαλύτερο του ένα. Στους πίνακες δίνουμε τα αποτελέσματα μόνο για θετικά a , μια και για αρνητικές τιμές του a τα αποτελέσματα ήταν σχεδόν συμμετρικά. Επίσης, στους πίνακες παρατηρούμε ότι τα αποτελέσματα για τους MAD και EET εκτιμητές είναι πρακτικά ίδια. Το ίδιο συμβαίνει και με τα υπόλοιπα χαρακτηριστικά της κατανομής τους, που δεν παρουσιάζονται εδώ, για οικονομία χώρου. Για τον λόγο αυτό, στη συνέχεια, στις συγκρίσεις μας θα αναφερόμαστε μόνο μεταξύ ET και EET.

Στον Πίνακα 4.2 δίνονται τα αποτελέσματα των εκτιμήσεων

όταν τα σφάλματα έχουν επιλεγεί από τη Laplace. Συγκρίνοντας τα ET με τα EET, με κριτήριο την αναμενόμενη τετραγωνική απόκλιση, τα EET υπερτερούν για όλες τις τιμές του α . Βελτιώνουν συγκριτικά την επίδοσή τους με το μέγεθος του δείγματος και για $|\alpha| \rightarrow 1$. Η κατανομή τους γενικά προσεγγίζει την κανονική, πλησιάζει περισσότερο για μεγαλύτερα N και μόνο για $|\alpha|$ κοντά στο ένα γίνεται κάπως λεπτόκυρτη και ασύμμετρη προς την πλευρά του μηδενός.

Στον Πίνακα 4.3. δίνονται τα αποτελέσματα για κανονικά σφάλματα. Τα αποτελέσματα είναι ανάλογα με τα προηγούμενα, όσο αφορά την κανονικότητα των εκτιμητών. Εδώ υπερέχουν τα ET σε σύγκριση με τα EET. Είναι αναμενόμενο, μια και στην περίπτωση αυτή τα ET είναι εκτιμητές ΔΜΠ. Αξιοσημείωτο είναι ότι η υπεροχή των ET αμβλύνεται όσο το $|\alpha| \rightarrow 1$, που δηλώνει μια αντίστροφη τάση από την προηγούμενη περίπτωση.

Στον Πίνακα 4.4 δίνουμε τον λόγο της διακύμανσης των εκτιμήσεων του α στις 300 επαναλήψεις ως προς τον μέσο των εκτιμημένων θεωρητικών διακυμάνσεων του α για τους τρεις εκτιμητές. Στην πρώτη στήλη εμφανίζονται τα αποτελέσματα για Laplace σφάλματα, στη δεύτερη για κανονικά. Οι προσομοιώσεις δείχνουν πως οι σχέσεις για τη διακύμανση του $\hat{\alpha}$ από MAD εκτιμητές (βλ. Harvey, 1977, Weiss, 1991) δεν επιβεβαιώνονται. Υποεκτιμούν, ιδιαίτερα για σχετικά μικρότερα δείγματα, τη διακύμανση των εκτιμητών που δίνει η μελέτη προσομοίωσης. Το πρόβλημα βελτιώνεται με το μέγεθος του δείγματος, αλλά εξακολουθεί να υφίσταται σε σημαντική έκταση. Κατά πολύ ακριβέστερη φαίνεται η έκφραση για τα ET, αν και εκεί για $|\alpha| \rightarrow 1$ η διακύμανση πάλι υποεκτιμάται.

ΠΙΝΑΚΑΣ 4.2
 Εκτίμηση της παραμέτρου α του AR(1) με σφάλματα Laplace. Δίνονται οι μέσοι και οι τυπικές αποκλίσεις από 300 επαναλήψεις για διαφορετικά α και N .

N	α	0.00	0.10	0.30	0.80	0.90	0.99						
50	EI	-.021	.141	.074	.141	.263	.138	.731	.103	.821	.093	.891	.078
	MAD	-.019	.136	.076	.131	.272	.128	.749	.106	.843	.089	.919	.069
	EET	-.018	.136	.077	.131	.271	.129	.751	.099	.843	.087	.918	.068
100	EI	-.014	.091	.083	.091	.278	.090	.766	.065	.862	.055	.943	.037
	MAD	-.003	.081	.094	.080	.293	.076	.782	.054	.877	.044	.961	.029
	EET	-.004	.080	.095	.080	.293	.076	.781	.054	.876	.044	.959	.028
400	EI	-.006	.043	.093	.043	.292	.042	.791	.028	.891	.022	.980	.011
	MAD	-.004	.034	.096	.034	.296	.033	.795	.020	.895	.015	.985	.009
	EET	-.004	.034	.096	.034	.295	.033	.795	.021	.895	.016	.984	.009

ΠΙΝΑΚΑΣ 4.3

Εκτίμηση της παραμέτρου α του AR(1) με σφάλματα κανονικά. Δίνονται οι μέσοι και οι τυπικές αποκλίσεις από 300 επαναλήψεις για διαφορετικά α και N .

N	α	0.00	0.10	0.30	0.80	0.90	0.99						
50	EI	-.016	.146	.063	.144	.251	.134	.736	.098	.813	.094	.890	.077
	MAD	-.016	.178	.058	.190	.243	.169	.730	.113	.816	.103	.886	.092
	EET	-.015	.178	.062	.184	.244	.168	.730	.112	.816	.102	.883	.092
100	EI	-.013	.093	.093	.103	.288	.096	.764	.068	.863	.052	.937	.043
	MAD	-.014	.117	.090	.124	.297	.112	.764	.084	.864	.064	.939	.047
	EET	-.015	.116	.089	.122	.299	.109	.764	.084	.863	.063	.938	.047
400	EI	-.008	.048	.100	.051	.295	.045	.791	.030	.892	.023	.978	.012
	MAD	-.005	.063	.099	.059	.293	.057	.791	.040	.891	.029	.978	.014
	EET	-.005	.062	.100	.058	.294	.055	.791	.038	.891	.028	.978	.013

ΠΙΝΑΚΑΣ 4.4

Δίνεται ο λόγος της δειγματικής διακύμανσης των εκτιμητών του α στις 300 επαναλήψεις, προς τη μέση εκτιμημένη διακύμανση. Στη στήλη (1) από σφάλματα Laplace, στη (2) από κανονικά.

N	α	0.00		0.10		0.30		0.80		0.90		0.99	
		(1)	(2)	(1)	(2)	(1)	(2)	(1)	(2)	(1)	(2)	(1)	(2)
50	ET	1.99	1.06	0.99	1.04	1.01	0.95	1.13	1.04	1.32	1.34	1.49	1.47
	MAD	1.75	2.49	1.64	2.86	1.68	2.39	2.29	2.15	2.32	2.51	2.13	3.20
	EET	1.74	2.49	1.64	2.69	1.70	2.35	2.01	2.13	2.22	2.47	2.11	3.19
100	ET	0.82	0.86	0.83	1.08	0.88	1.00	1.02	1.01	1.16	1.08	1.22	1.50
	MAD	1.29	2.15	1.27	2.44	1.23	2.15	1.38	2.65	1.45	2.52	1.48	2.84
	EET	1.24	2.10	1.27	2.38	1.23	2.02	1.36	2.60	1.47	2.48	1.39	2.79
400	ET	0.91	0.93	0.93	0.90	0.97	0.90	1.08	0.99	1.13	1.02	1.60	1.39
	MAD	1.18	2.51	1.18	2.18	1.20	2.21	1.09	2.61	1.14	2.54	1.76	2.81
	EET	1.14	2.42	1.15	2.12	1.19	2.08	1.15	2.43	1.20	2.33	1.91	2.60

Το τρίτο αντικείμενο της μελέτης προσομοίωσης ήταν η ικανότητα του AR(1) στην πρόβλεψη κατά ένα βήμα προς τα εμπρός, όταν η παράμετρος του έχει εκτιμηθεί με τις μεθόδους που προαναφέραμε. Στα προηγούμενα πειράματα δημιουργήθηκαν 20 επιπλέον των N παρατηρήσεις κάθε φορά· χρησιμοποιήσαμε τις N για την εκτίμηση και κρατήσαμε τις 20 για να ελέγξουμε την προβλεπτική ικανότητα. Η επίδοση αξιολογήθηκε με βάση τη Μέση Απόλυτη Απόκλιση και τη Μέση Τετραγωνική Απόκλιση. Δεν θα δόσουμε αναλυτικά αποτελέσματα, αλλά γενικά τα δύο μέτρα δεν έδειξαν σημαντικές διαφορές μεταξύ τους, τουλάχιστον σε έκταση που να οδηγεί σε διαφορετικά συμπεράσματα. Όταν τα σφάλματα ήταν Laplace, διαπιστώθηκε μια οριακή υπεροχή των EET. Η μελέτη δεν έδειξε βελτίωση με το μέγεθος του δείγματος, ούτε κάποια αισθητή τάση αναφορικά με το μέγεθος του α . Τα ίδια αποτελέσματα είχαμε για κανονικά σφάλματα, αλλά

με τα ΕΤ αυτή τη φορά να υπερέχουν οριακά.

5. ΕΝΑ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΟ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Στους Box και Jenkins (1970, σ. 526, Σειρά Β) δίνονται 369 ημερήσιες παρατηρήσεις από τις τιμές των μετοχών της IBM. Οι Wichern κ.ά. (1976) εκτιμούν για τη διαφορά των λογαρίθμων της σειράς αυτής ένα ετεροσκεδαστικό AR(1). Οι εκτιμητές τους είναι ΔΜΠ, με την υπόθεση ότι τα σφάλματα είναι κανονικά κατανεμημένα. Για τα ίδια δεδομένα, θα εκτιμήσουμε ένα ετεροσκεδαστικό AR(1), κάτω από την υπόθεση ότι τα σφάλματα προέρχονται από τη Laplace. Ως υπόθεση φαίνεται λογικότερη, μια και ο συντελεστής κύρτωσης για τα δεδομένα είναι περίπου οκτώ. Επίσης, ο συντελεστής αυτοσυσχέτισης για μια χρονική υστέρηση είναι αρκετά μικρός, ώστε σύμφωνα με τα συμπεράσματα της ενότητας 2, η κατανομή των παρατηρήσεων να μη διαφέρει σημαντικά από την κατανομή των σφαλμάτων.

ΠΙΝΑΚΑΣ 5.1

Εκτίμηση ετεροσκεδαστικού AR(1) για τα IBM δεδομένα. Οι τιμές των διακυμάνσεων πρέπει να πολλαπλασιασθούν με 10^{-4} .

Κατανομή σφαλμάτων	$\hat{\alpha}$	$\hat{\sigma}_1^2$	$\hat{\sigma}_2^2$	$\hat{\sigma}_9^2$	Άθρ. τετ. σφαλμ.
Κανονικά	0.130	0.90	0.60	7.20	0.1169
Laplace	0.034	1.22	0.97	8.30	0.1156

Ως σημεία αλλαγής της διακύμανσης δεχθήκαμε τα ίδια με των Wichern κ.ά. (1976, σ. 254), δηλαδή τις χρονικές στιγμές 80 και 235. Η βελτιστοποίηση της πιθανοσυνάρτησης έγινε με EET. Στον Πίνακα 5.1 δίνουμε συγκριτικά τα αποτελέσματα των εκτιμήσεων του Wichern και των δικών μας. Στην τελευταία στήλη δίνουμε το άθροισμα των τετραγώνων των σφαλμάτων. Φαίνεται ότι η εκτίμηση, κάτω από την υπόθεση για Laplace σφάλματα, επιφέρει μια ελαφρά βελτίωση της τάξης του 1%.

Η τυπική απόκλιση της εκτίμησης του α είναι 0.0445. Επομένως, με πιθανότητα 0.95, το α δεν διαφέρει σημαντικά από το μηδέν. Αυτό οδηγεί στην υιοθέτηση της υπόθεσης τυχαίου περιπάτου για τους λογαρίθμους των παρατηρήσεων.

6. ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Όπως είδαμε στην ενότητα 2, το υπόδειγμα (2.1) μας δίνει κατανομές σημαντικά διαφορετικές από την κανονική, όταν $|a| \rightarrow 0$. Αυτό σημαίνει ότι η χρήση του (2.1) θα δικαιολογούνταν σε περιπτώσεις όπου μια προκαταρκτική ανάλυση των παρατηρήσεων θα έδειχνε, ανάμεσα σε άλλα, και χαμηλές αυτοσυσχετίσεις. Γενικά, στην κατηγορία αυτή εμπίπτουν οι πρώτες διαφορές χρηματοοικονομικών σειρών (βλ. Fama, 1970), όπως το παράδειγμα της προηγούμενης ενότητας.

Η στατιστική R_T από τη (2.3) ή ο λογάριθμός της έχουν προβλήματα, όπως έδειξε η μελέτη προσομοίωσης, σε βαθμό που πρακτικά να μην είναι αξιοποιήσιμα. Πιθανόν κάποιος καταλληλότερος μετασχηματισμός να έδινε καλύτερα αποτελέσματα. Επίσης, πρέπει να προσδιορισθεί και η κατανομή ενός

τέτοιου μετασχηματισμού, ώστε οι αποφάσεις να παίρνονται μετά από την τυπική διαδικασία στατιστικού ελέγχου. Για τον ίδιο σκοπό θα μπορούσαν να χρησιμεύσουν και άλλα χαρακτηριστικά ροπών (π.χ. βλέπε Brillinger, 1981, σ. 19), για τον ορισμό ημιαναλλοιώτων (cumulants) ανωτέρας τάξεως.

Στη μελέτη προσομοίωσης, η διαδικασία των ΕΕΤ έδειξε πολύ καλές ιδιότητες και συμφωνεί σε σημαντικό βαθμό με τα αποτελέσματα από τον αλγόριθμο MAD. Αυτό ήταν αναμενόμενο, μια και ουσιαστικά και οι δύο μέθοδοι είναι εκτιμητές ΔΜΠ για την περίπτωση των Laplace σφαλμάτων. Απλά, βελτιστοποιούμε κάθε φορά την ίδια εκτιμήτρια συνάρτηση με διαφορετικό τρόπο. Όμως, τα ΕΕΤ έχουν το συγκριτικό πλεονέκτημα ότι μπορούμε εύκολα να τα προσαρμόσουμε για περισσότερο πολύπλοκες περιπτώσεις, όπως το ετεροσκεδαστικό υπόδειγμα της ενότητας 4.

Καταλήγοντας, θα μπορούσαμε να πούμε πως λύνοντας το πρόβλημα αναγνώρισης της κατανομής των σφαλμάτων, τα απλά γραμμικά υποδείγματα με λεπτόκυρτες ή / και ασύμμετρες κατανομές σφαλμάτων θα άξιζαν προσοχής ως όργανα ανάλυσης χρονικών σειρών.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

- Arthanari T. S., Y. Dodge (1981), *Mathematical Programming in Statistics*, Wiley, New York.
- Box G.E.P., G.M. Jenkins (1970), *Time Series Analysis: Forecasting and Control*, Holden-Day, San Francisco.
- Brillinger D. R. (1981), *Time Series: Data Analysis and Theory*, Holden - Day, San Francisco.
- Brockwell P.J., R.A. Davis (1987), *Time Series: Theory and Methods*, Springer Verlag, New York.
- Davies N., T. Spedding, W. Watson (1980), "Autoregressive Moving Average Processes with Non-Normal Residuals", *J. Time Ser. Anal.*, 1, 103-9.
- Dunsmuir W. T., N. M. Spencer (1991), "Strong Consistency and Asymptotic Normality of L_1 Estimates of the Autoregressive Moving-Average Model", *J. Time Ser. Anal.*, 12, 95 - 104.
- Fama E. F. (1970), "Efficient Capital Markets: A Review of Theory and Empirical Work", *J. of Finance*, 35, 383 - 417.
- Harvey A. C. (1977), "A Comparison of Preliminary Estimators for Robust Regression", *J. Amer. Stat. Ass.*, 72, 910 - 913.
- Li W. K. (1991), "Testing Model Adequacy for Some Markov Regression Models for Time Series", *Biometrika*, 78, 83 - 9.
- Li W. K., A. I. McLeod (1988), "ARMA Modelling With Non-Gaussian Innovations", *J. Time Ser. Anal.*, 9, 155 - 68.
- Lusk E. J., H. Wright (1982), "Non-Gaussian Series and Series With Non-Zero Means: Practical Implications for Time Series Analysis", *Stat. and Prob. Letters*, 1, 2 - 6.
- Mallows C. L. (1967), "Linear Processes are Nearly Gaussian", *J. Appl. Prob.*, 4, 313 - 329.
- Nelson H. L., C. W. J. Granger (1979), "Experience With Using the Box-Cox Transformation When Forecasting Economic Time Series", *J. Econ.*, 10, 57 - 69.

- Tjostheim D. (1986), "Some Doubly Stochastic Time Series Models", *J. Time Ser. Anal.*, 7, 51 - 72.
- Weiss A. A. (1991), "Estimating Nonlinear Dynamic Models Using Least Absolute Error Estimation", *Econ. Theory*, 7, 46 - 68.
- West M. P., P.J. Harrison, H.S. Migon (1985), "Dynamic Generalized Linear Models and Bayesian Forecasting", *J. Amer. Statist. Ass.*, 80, 73 - 96.
- Wichern D. W., R. B. Miller, D. Hsu (1976), "Changes of Variance in First - Order Autoregressive Time Series Models - With an Application", *Appl. Statist.*, 25, 248 - 56.